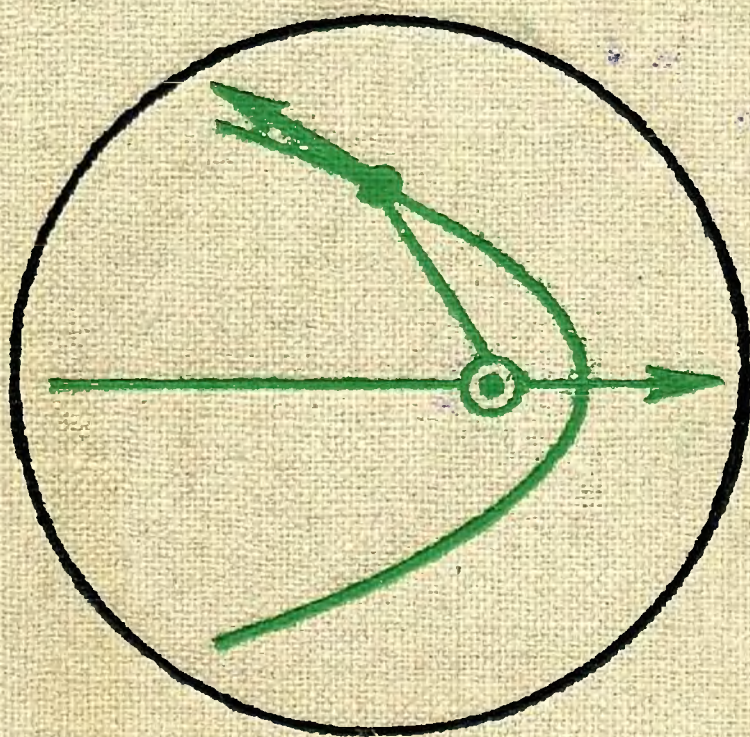


М.Б.БАЛК, В.Г.ДЕМИН, А.Л.КУНИЦЫН

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ
И КОСМОДИНАМИКЕ



М. Б. БАЛК, В. Г. ДЕМИН, А. Л. КУНИЦЫН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ И КОСМОДИНАМИКЕ

Под общей редакцией
В. Г. ДЕМИНА

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

Сборник задач по небесной механике и космодинамике.
Балк М. Б., Демин В. Г., Куницын А. Л.,
Главная редакция физико-математической литературы
изд-ва «Наука», М., 1972, 336 стр.

Первый в советской и мировой литературе задачник по небесной механике и теории движения космических аппаратов, охватывающий как традиционные вопросы теории движения естественных небесных тел, так и инженерные задачи космонавтики.

В книгу включены задачи и упражнения по теории притяжения, теории невозмущенного кеплеровского движения, проблеме нескольких тел (как ограниченной, так и неограниченной), теории возмущенного движения искусственных и естественных небесных тел, качественным методам исследования движения, ракетодинамике и управляемым движениям. Каждой главе предпосылается краткая сводка сведений из теории.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов и преподавателей университетов и вузов, осуществляющих подготовку по космонавтике и астрономии. Подробные ответы, указания и решения позволяют использовать книгу и для самостоятельного изучения предмета.

Марк Беневич Балк, Владимир Григорьевич Демин, Андрей Леонидович Куницын

Сборник задач
по небесной механике и космодинамике

М., 1972 г., 336 стр. с илл.

Редактор А. А. Могилевский

Техн. редактор И. Ш. Аксельрод

Корректоры З. В. Автонева, Е. Я. Строева

Сдано в набор 6/V 1972 г. Подписано к печати 11/X 1972 г. Бумага 60×90^{1/16}, тип. № 2.
Физ. печ. л. 21. Условн. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 21,13. Тираж 5000 экз. Т-16814.
Цена книги 95 коп. Заказ № 1552

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в типографии изд-ва «Наука», Ленинград, 9 линия, д. 12, с матриц Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава I. Элементы сферической астрономии	9
§ 1. Географические координаты	9
§ 2. Основные формулы сферической тригонометрии	12
§ 3. Астрономические системы координат	15
§ 4. Измерение времени	20
§ 5. Основные редукции астрономических координат	24
Литература	28
Глава II. Теория ньютоновского потенциала	30
§ 1. Ньютоновский потенциал тела	30
§ 2. Уравнение Лапласа. Разложение потенциала тяготения в ряд по сферическим функциям	34
§ 3. Притяжение эллипсоидальных тел	38
Литература	40
Глава III. Задача двух тел	41
§ 1. Первые интегралы задачи. Уравнение орбиты	41
§ 2. Скорость кеплеровского движения	45
§ 3. Геометрические способы исследования задачи двух тел	51
§ 4. Третий закон Кеплера	54
Литература	57
Глава IV. Продолжительность перелета по кеплеровской орбите	58
§ 1. Полет от перигелия. Уравнение Кеплера	58
§ 2. Решение уравнения Кеплера	63
§ 3. Ряды для кеплеровского эллиптического движения	67
§ 4. Формула Ламберта	70
§ 5. Импульсный орбитальный маневр в центральном ньютоновском поле тяготения	72
§ 6. Приложения комплексных переменных в небесной механике	74
Литература	77

Глава V. Вычисление координат в невозмущенном кеплеровском движении. Определение орбит	78
§ 1. Вычисление координат в невозмущенном кеплеровском движении	78
§ 2. Определение элементов эллиптической орбиты по результатам наблюдений	81
§ 3. Трасса спутника на поверхности планеты	88
Литература	89
Глава VI. Методы аналитической динамики в небесной механике	90
§ 1. Уравнения Лагранжа, Рауса и Гамильтона	90
§ 2. Канонические преобразования. Теорема Якоби	94
§ 3. Движение в центральном поле сил	98
§ 4. Устойчивость движения естественных небесных тел и космических аппаратов	101
Литература	106
Глава VII. Основные неограниченные и ограниченные задачи небесной механики	107
§ 1. Уравнения движения и первые интегралы задачи нескольких тел в барицентрической системе координат	107
§ 2. Уравнения относительного движения в задаче нескольких тел	110
§ 3. Частные решения задачи нескольких тел	113
§ 4. Ограниченная задача трех тел	116
§ 5. Классическая задача двух неподвижных центров	120
§ 6. Предельная задача двух неподвижных центров	124
§ 7. Обобщенная задача двух неподвижных центров	128
Литература	132
Глава VIII. Возмущенное движение небесных тел	133
§ 1. Возмущающая сила. Возмущающая функция	133
§ 2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения в оскулирующих элементах	135
§ 3. Возмущенное движение искусственного спутника	138
§ 4. Способ сфер действия	142
Литература	145
Глава IX. Ракетодинамика	146
§ 1. Механика точки переменной массы	146
§ 2. Расчет многоступенчатых ракет	149
§ 3. Обратные и экстремальные задачи динамики точки переменной массы	152
Литература	156

Глава X. Управление движением космического аппарата	157
§ 1. Орбитальное движение в центральном поле под действием непрерывной тяги	157
§ 2. Оптимальные импульсные маневры в центральном поле. Оптимальная дифференциальная коррекция	161
§ 3. Вариационные задачи динамики ракет и космического полета .	167
Литература	174
Глава XI. Разные задачи	175
Ответы, указания, решения	185
Приложения	324
Таблица 1. Число дней от начала юлианского периода	324
Таблица 2. Коэффициенты разложений $C_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета	325
Таблица 3. Коэффициенты разложений $S_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета	329
Таблица 4. Система астрономических постоянных (МАС, 1964 г.) .	333
Таблица 5. Средние элементы планет Солнечной системы и Луны	335

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время значительно расширился круг лиц, интересующихся проблемами движения небесных тел, как естественных, так и искусственных. Изучение тех или иных разделов классической небесной механики и динамики космического полета предусмотрено учебными планами подготовки специалистов различных профилей на астрономических и механических отделениях университетов и в ряде технических вузов. В некоторых вузах читаются факультативные курсы и проводятся специальные семинары по отдельным вопросам динамики космического полета. Многие представители разнообразных профессий изучают сейчас этот предмет в порядке самообразования.

Более глубокому осмысливанию теоретического материала способствует систематическое решение задач. Однако имеющиеся иллюстративные примеры и отдельные задачи в ряде учебных руководств и монографий по этому предмету явно недостаточны. Не вызывает сомнения необходимость издания систематического сборника задач по небесной механике, включающего также задачи о движении искусственных небесных тел.

Авторы предприняли попытку восполнить этот пробел в существующей литературе.

Мы надеемся также, что данное учебное пособие окажется полезным и слушателям университетского курса теоретической механики, ибо в нем имеется достаточное число задач по теории движения точки в центральном поле сил, по аналитической динамике и теории устойчивости движения, т. е. по таким темам университетской программы, которые почти совсем не развиты в стабильных сборниках задач по теоретической механике.

Для того чтобы облегчить читателю работу со «Сборником задач», мы каждому параграфу в каждой главе, исключая последнюю, предпосылаем сводку справочных сведений, содержащую всё необходимое для решения задач (основные определения, формулы, теоремы и т. п.). Там же указывается литература для справок — одно или несколько наиболее доступных учебных руководств, в которых читатель может, в случае надобности, найти достаточно полное освещение вопросов, упомянутых в «Справочных сведениях». Ссылки даются на книги, указанные в конце каждой главы. К сожалению,

сейчас нет возможности ограничиться ссылками лишь на один или два учебника; однако мы стремились сделать этот список минимальным. Кроме него читатель найдет в каждой главе более обширный список дополнительной литературы.

Учитывая интересы студентов заочных и вечерних отделений, а также лиц, занимающихся самостоятельным изучением небесной механики, мы не только приводили ответы к задачам, но и снабдили многие задачи решениями или указаниями.

Несколько обособленное место занимает в книге последняя глава «Разные задачи». Она содержит задачи более сложные или требующие применения сведений из различных разделов. Эти задачи могут стать предметом курсовых работ, их также можно использовать в работе спецсеминаров и спецпрактикумов.

В подавляющем большинстве задачи, приведенные в «Сборнике», либо составлены авторами впервые, либо представляют собой коренную переработку ранее предлагавшихся задач. Ряд задач заимствован из различных отечественных и зарубежных учебных пособий, монографий, журнальных статей. По ряду причин мы сочли возможным не приводить всякий раз источник заимствования задачи.

Задачи по основным темам, приводимые в настоящем «Сборнике», неоднократно рассматривались на практических занятиях в Московском университете, Московском инженерно-физическом институте и Смоленском педагогическом институте, работниками которых являются авторы.

Мы обычно отдавали предпочтение системе астрономических постоянных, принятой на XII Генеральной ассамблее Международного Астрономического Союза (Гамбург, 1964 г.). В некоторых заимствованных задачах соответствующий пересмотр условий задачи был затруднительным, и мы ограничивались лишь переходом к метрической системе мер. Заметим, что на практике при выполнении точных расчетов в некоторых задачах динамики космического полета, например при расчетах перелетов к Луне, следует пользоваться числовыми значениями параметров, отличающимися от рекомендованных Астрономическим Союзом.

Обозначения, сокращения и терминология приведены в согласии с астрономическими традициями. Механические и математические термины были приняты в соответствии с университетскими курсами математики и механики. Если наряду с математическим и механическим термином существует астрономический его синоним, то предпочтение отдавалось последнему.

При работе со «Сборником» читатели должны иметь в виду, что мы отказались от сквозной нумерации задач и формул, использовав в каждом параграфе «автономную» нумерацию. Поэтому при ссылках на задачи и формулы в пределах одного параграфа мы указывали только соответствующий номер. Если же ссылка относилась к формуле или задаче из другого параграфа и главы, то номеру формулы

или задачи предшествуют номер главы и номер параграфа, даваемые через точку. Например, ссылка на задачу 3 из § 2 главы 4 имеет вид: задача 4.2.3.

За ценные замечания, способствовавшие улучшению книги, мы выражаем свою благодарность проф. Е. А. Гребеникову, проф. С. А. Горбатенко и инж. Ю. Н. Исаеву.

Мы отдаем себе отчет в том, что написание задачника по небесной механике — дело новое и что поэтому предлагаемый вниманию читателя «Сборник» нуждается несомненно в дальнейшем усовершенствовании. Не исключено, что в решения, ответы или указания к отдельным задачам вкрались погрешности, опечатки, неточности. Мы будем искренне благодарны всем читателям, которые сообщат нам свои критические замечания и пожелания. Письма с замечаниями и предложениями просим направлять в адрес издательства.

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ СФЕРИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

§ 1. Географические координаты

Справочные сведения

Фигура Земли. В зависимости от требуемой точности расчетов можно пользоваться тремя моделями Земли: а) шаром, центр которого совпадает с центром инерции Земли, а радиус определяется из условия его равновеликости с реальной Землей; б) сжатым эллипсоидом вращения (сжатым сфероидом); в) трехосным эллипсоидом.

Для шаровой модели радиус Земли можно принять равным $R_3 = 6371$ км.

В большинстве задач за фигуру Земли можно принять *эллипсоид вращения (референц-эллипсоид)*, характеризуя его большой полуосью (экваториальным радиусом) a_3 и *сжатием* α_3 (под сжатием понимается величина $\alpha_3 = (a_3 - b_3)/a_3$, где b_3 — наименьшая полуось эллипсоида). По решению XII Генеральной ассамблеи Международного Астрономического Союза (Гамбург, 1964 г.) для параметров a_3 и α_3 приняты значения

$$a_3 = 6\,378\,165 \text{ м}, \quad \alpha_3 = 1/298,25.$$

В СССР принят трехосный эллипсоид Ф. Н. Красовского. Если через a_3 , b_3 , c_3 обозначить полуоси эллипсоида ($a_3 > b_3 > c_3$), а через α_3 и α'_3 — сжатия главных сечений (первое сжатие $\alpha_3 = (a_3 - c_3)/a_3$, второе сжатие $\alpha'_3 = (b_3 - c_3)/b_3$), то эллипсоид Красовского можно характеризовать следующими значениями его параметров:

$$a_3 = 6\,378\,245 \text{ м}, \quad b_3 = 6\,356\,863 \text{ м}, \quad \alpha_3 = 1/298,3, \quad \alpha'_3 = 1/30\,000.$$

Большая полуось эллипсоида Красовского встречает поверхность Земли западнее гринвичского меридиана и составляет с ним угол в 15° .

Линии и точки земного сфероида. Ось вращения Земли пересекается с земным сфероидом в *северном и южном полюсах*, причем за северный полюс принят тот, из которого вращение Земли представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Плоскость, проходящая через центр масс Земли и перпендикулярная оси ее вращения, называется *экваториальной плоскостью*, а линию ее пересечения с поверхностью земного эллипсоида называют *земным экватором*.

Линии пересечения земного эллипсоида с плоскостями, параллельными экваториальной плоскости, называются *географическими параллелями*.

Плоскость, проходящая через ось вращения Земли, пересекается с земным эллипсоидом по линии, именуемой *географическим меридианом*.

Координаты точки земной поверхности. Положение точки на земной поверхности задается двумя географическими координатами: *долготой* и *широтой*.

Различают два типа долгот: *геодезическую* и *астрономическую*.

Геодезическая долгота L измеряется двугранным углом между плоскостью меридиана данной точки и плоскостью гринвичского (нулевого) меридиана. Отсчет долгот производится от гринвичского меридиана к востоку в пределах от 0° до 360° (или в «часовой» мере от 0 до 24 часов)*. Принят также счет долгот в обе стороны от гринвичского меридиана в пределах от 0° до 180° , причем восточные долготы считаются положительными, а западные — отрицательными.

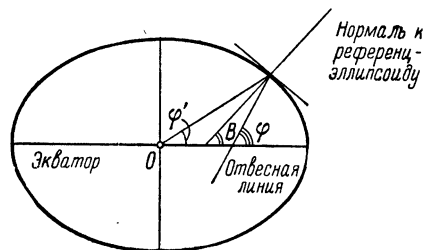


Рис. 1.1.

Астрономическая долгота λ есть двугранный угол между плоскостями астрономических меридианов данного места и Гринвича, причем под плоскостью астрономического меридиана понимают плоскость, проходящую через отвесную линию данной точки земной поверхности.

Используется также несколько типов географических широт (рис. 1.1).

Геодезическая широта B в данном месте представляет собой угол между нормалью к поверхности принятого земного эллипсоида и его экваториальной плоскостью. Широта считается положительной в северном полушарии и отрицательной — в южном. Она изменяется в пределах от -90° до $+90^\circ$.

Астрономическая широта φ есть угол между отвесной линией для данной точки земной поверхности и экваториальной плоскостью Земли.

Геоцентрическая широта φ' — угол между геоцентрическим радиусом-вектором, проведенным в данную точку земной поверхности, и плоскостью земного экватора.

Геодезическая и геоцентрическая широты связаны соотношением

$$B - \varphi' = 103\,132,4 e_3^2 \sin 2\varphi, \quad (1)$$

в котором разность широт выражена в секундах, а $e_3^2 = 2\alpha_3 - \alpha_3^2$.

Для задания положения точки реальной поверхности в дополнение к широте и долготе вводится *геодезическая высота* H , измеряемая расстоянием по нормали к принятому земному эллипсоиду (референц-эллипсоиду) (рис. 1.1). Геоцентрические прямоугольные координаты x , y , z точки земной поверхности вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= (C + H) \cos B \cos L, \\ y &= (C + H) \cos B \sin L, \\ z &= (S + H) \sin B, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

*) Наряду с радианным и градусным измерением дуг в астрономии применяется «часовая» мера, в которой за единицу измерения принимается дуга в 15° . Эта единица дуги называется часом и сокращенно обозначается верхним индексом h . Один час содержит 60 минут (сокращенно обозначается верхним индексом m), а минута делится на 60 секунд (сокращенно s). Очевидно, что

$$1^h = 15^\circ, \quad 1^m = 15', \quad 1^s = 15'',$$

а также

$$1^\circ = 4^m, \quad 1' = 4^s, \quad 1'' = (1/15)^s.$$

где

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - e_3^2 \sin^2 B}}, \quad S = (1 - e_3^2) C. \quad (3)$$

Величины C и S приводятся в Астрономическом Ежегоднике СССР (см., например, Астрономический Ежегодник СССР на 1964 г., стр. 580).

Для задания положений точек на поверхности какой-либо планеты вводятся *планетографические координаты*, аналогичные введенным для Земли. Планетографическая система координат для Марса называется *ареографической*, для Юпитера — *зенографической*, для Луны — *селенографической* и т. д.

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [3], дополнительная — [4], [8].

ЗАДАЧИ

1. В некоторый момент времени космический аппарат наблюдался на угловом расстоянии*) в $48^\circ 21' 09''$ от плоскости московского меридиана. Выразите это угловое расстояние в часовой мере.

2. Географические долготы подспутниковых точек двух экваториальных спутников Земли в некоторый момент времени были соответственно равны $2^h 30^m 27^s$ и $4^h 07^m 33^s$. Найдите угловое расстояние между подспутниковыми точками в градусной мере.

3. Пренебрегая несферичностью Земли и считая, что Ташкент и Тобольск расположены на одном меридиане, а расстояние между ними по дуге меридиана составляет 1877 км, вычислите радиус Земли. Географические широты Ташкента и Тобольска принять соответственно равными $41^\circ 19'$ и $58^\circ 12'$.

4. Определите в линейной мере длину дуги (географической) параллели земного шара, содержащую α градусов и проходящую через точку, находящуюся под географической широтой φ . Принять $\alpha = 42^\circ 15' 07''$, $\varphi = 37^\circ 24' 10''$.

5. Вычислите, на какой географической параллели разность между значениями геодезической и геоцентрической широт достигает максимального значения. Чему равно это максимальное значение?

6. Вычислите прямоугольные геоцентрические координаты наблюдателя, находящегося в пункте A , если известно, что геодезическая широта $B = 40^\circ$, геодезическая долгота $L = 0$, а геодезическая высота (над референц-эллипсоидом) $H = 1500$ м.

7. С большой степенью точности можно считать, что Марс имеет форму сплюснутого эллипсоида вращения со сжатием $\alpha_M = 1/150$. Найдите прямоугольные планетоцентрические координаты точки, расположенной на его поверхности на «геодезической» широте $B = 30^\circ$ и «геодезической» долготе $L = 0$. Высота $H = 500$ м. Экваториальный диаметр Марса принять равным 6830 км.

*) Под *угловым расстоянием* будем всегда понимать угол с вершиной в точке наблюдения между направлениями на рассматриваемые небесные объекты.

8. Вычислите геодезические координаты подспутниковой точки, получающейся при проектировании положения спутника на референц-эллипсоид, по заданным значениям его прямоугольных геоцентрических координат.

§ 2. Основные формулы сферической тригонометрии

Справочные сведения

Определения. Пусть имеется сфера произвольного радиуса. Будем рассматривать на ней дуги, принадлежащие большим кругам (под *большим кругом* понимается окружность, центр которой совпадает с центром сферы; все остальные «круги» называются *малыми*). Любому большому кругу сферы соответствуют два *полюса* — две точки пересечения со сферой перпендикуляра к плоскости большого круга, проведенного через центр сферы.

Сферические треугольники. Большинство задач сферической астрономии связано с решением треугольников, построенных на сфере. Под *сферическим треугольником* понимают часть сферы, ограниченную тремя дугами больших кругов, попарно соединяющими какие-либо три точки сферы (рис. 1.2).

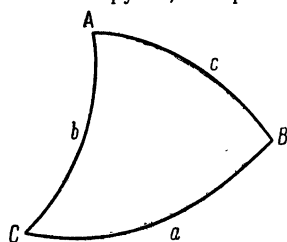


Рис. 1.2.

Последние называются *сторонами* сферического треугольника, а точки их пересечения — *вершинами*. Под *углом* сферического треугольника понимают угол между касательными, проведенными в вершине к сторонам треугольника. И стороны, и углы сферического треугольника измеряются в градусной (или часовой) мере.

Стороны и углы сферического треугольника принято обозначать соответственно строчными и прописными буквами, как это показано на рис. 1.2.

В дальнейшем будут рассматриваться только *эйлеровские треугольники*, у которых каждая из сторон не превосходит 180° . Сумма углов эйлеровского треугольника заключается в пределах от 180° до 540° , а сумма его сторон не превосходит 360° .

Основные формулы. Стороны и углы сферического треугольника связаны двумя основными группами соотношений.

Первая группа формул:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad (1)$$

(теорема косинусов),

$$\sin c \sin B = \sin b \sin C \quad (2)$$

(теорема синусов),

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \quad (3)$$

(формула пяти элементов)

(остальные формулы этой группы получаются циклической перестановкой букв).

Вторая группа формул:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c, \quad (4)$$

$$\cos a \sin C = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \quad (5)$$

(остальные формулы получаются циклической перестановкой букв).

Если один из углов в сферическом треугольнике прямой, то сферический треугольник называется *прямоугольным*. Для запоминания соотношений, связы-

вающих стороны и углы прямоугольного треугольника, существует *правило Непера*. Пусть A — прямой угол. Расположим на окружности последовательно против часовой стрелки величины (рис. 1.3) $b, c, 90^\circ - B, 90^\circ - a, 90^\circ - C$. Тогда синус любой из этих величин равен произведению тангенсов двух смежных

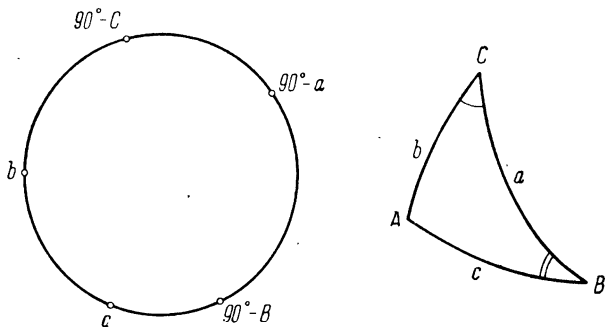


Рис. 1.3.

с ней величин и в то же время он равен произведению косинусов несмежных с ней величин.

При решении прямоугольных сферических треугольников удобно также пользоваться формулами вида

$$\cos a = \cos b \cos c, \tag{6}$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b, \tag{7}$$

$$\sin a \sin C = \sin c. \tag{8}$$

Литература: основная — [1] — [3], дополнительная — [4], [5], [7].

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что в равнобедренном сферическом треугольнике ($a = b$) угол A при основании дается формулой

$$\operatorname{tg} A = \sec a \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

2. Видимые траектории двух спутников на небосводе пересекаются друг с другом под углом $i = 60^\circ$. Найдите угловое расстояние между спутниками в момент времени, когда каждый из них отстоит от точки пересечения их видимых траекторий на угловом расстоянии $\gamma = 80^\circ$.

3. Спутник проходит над точкой земного экватора, находящейся на географической долготе λ_1 , и движется в плоскости, наклоненной к экватору под углом i . Определите географическую широту подспутниковой точки в тот момент, когда его географическая долгота равна λ_2 . Определите его угловое расстояние в этот момент от станции наблюдения. Географические координаты станции равны λ и φ .

4. В момент t_0 лунный спутник, движущийся по круговой орбите, находился над точкой лунной поверхности с селенографическими координатами λ_0 и φ_0 . Известны наклонение i плоскости орбиты спутника

к плоскости лунного экватора (для определенности полагаем, что $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$) и период обращения спутника вокруг Луны — T . Требуется предсказать, над каким пунктом лунной поверхности будет находиться спутник в заданный момент времени t . Вращением Луны пренебречь.

5. Найдите линейное отклонение фактической точки приземления космического корабля от расчетного положения с географической широтой φ и географической долготой λ , если отклонения точки приземления по широте и долготе соответственно составили $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$. Землю считать шаром радиуса R_3 . Малыми второго порядка относительно $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ пренебречь.

6. Расстояние между двумя станциями слежения за спутниками, отсчитанное по земной поверхности, составляет 10 982 км. Одна из станций располагается на земном экваторе. Разность географических долгот станций равна $9^{\text{h}}29^{\text{m}}08^{\text{s}}$, 67. Найдите разность географических широт. Землю считать шаром радиуса $R_3 = 6371$ км.

7. Найдите кратчайшее расстояние по земной поверхности от пункта с координатами $\lambda_1 = 13^\circ 23' 44''$, $\varphi_1 = 52^\circ 30' 17''$ до Парижа (Национальная обсерватория, $\lambda_2 = 2^\circ 20' 15''$, $\varphi_2 = 48^\circ 50' 11''$).

8. Межконтинентальная ракета стартовала в пункте с географическими координатами $\varphi_1 = 28^\circ 30'$, $\lambda_1 = -80^\circ 30'$ (мыс Кеннеди) и приземлилась в точке земной поверхности с координатами $\varphi = -16^\circ 56'$, $\lambda = 127^\circ 37'$ (Центральная Австралия). Вычислите кратчайшее расстояние по земной поверхности между указанными пунктами, считая Землю шаром. (П. Эскобал, Методы определения орбит.)

9. Станция наблюдения за искусственными спутниками Земли имеет географические координаты $\varphi_0 = 30^\circ$, $\lambda_0 = 6^{\text{h}}40^{\text{m}}$. Наблюдатель с помощью кинотеодолита следит за прохождением спутника. В тот момент, когда направление на спутник составляло с направлением на север угол 90° , причем спутник был восточнее места наблюдения, угол между направлением на спутник и плоскостью горизонта был равен $\eta = 30^\circ$. Установлено, что в этот момент спутник находился на высоте $H = 230$ км над поверхностью Земли. Найдите географические координаты φ и λ подспутниковой точки в момент наблюдений. Расчеты выполните, принимая для Земли шаровую модель.

10. Космический аппарат, движущийся вблизи Земли, находился в t_1 часов по московскому времени над пунктом A_1 с географическими координатами φ_1 , λ_1 , а несколько позднее, в момент t_2 , по московскому времени, — над пунктом A_2 с координатами φ_2 , λ_2 . В течение всего этого времени аппарат проходил лишь над северным полушарием. Известно также, что траектория аппарата лежит в плоскости, проходящей через центр Земли.

Укажите способ вычисления угла i наклона плоскости траектории к плоскости земного экватора. Рассуждения проведите применительно к шаровой модели Земли. Вычислите угол i , если $t_1 = 9^{\text{h}}$, $\varphi_1 = 30^\circ$, $\lambda_1 = 20^\circ$, $t_2 = 9^{\text{h}}30^{\text{m}}$, $\varphi_2 = 60^\circ$, $\lambda_2 = 80^\circ$.

11. Пункты A_1 и A_2 на земной поверхности (имеется в виду шаровая модель Земли) имеют географические координаты φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2 . Экваториальный спутник находится в точке S над пунктом с географической долготой λ_S на известном расстоянии R_S от центра Земли O . Со спутника видны оба пункта A_1 и A_2 . Вычислите угол γ , под которым из спутника виден отрезок A_1A_2 . Как вычислить $\angle OSA_1$ и $\angle OSA_2$?

12. Суточный круговой экваториальный спутник находится в зените над Кито (Эквадор). Под каким углом видна из спутника дуга, соединяющая Лос-Анджелес и Торонто? Географические координаты указанных пунктов найдите по карте.

§ 3. Астрономические системы координат

Справочные сведения

Небесная сфера. Геометрические рассуждения в астрономии и космодинамике удобно выполнять на вспомогательной сфере произвольного радиуса с центром в некоторой точке пространства, принятой за начало координат. Эта сфера получила название *небесной сферы*.

Различают *геоцентрическую, гелиоцентрическую, селеноцентрическую, ареоцентрическую, иоцентрическую* и т. д. небесные сферы в зависимости от того, будет ли центр небесной сферы помещен соответственно в центр инерции Земли, Солнца, Луны, Марса, Юпитера и т. д. Если центр небесной сферы расположен на поверхности планеты, то небесная сфера называется *топоцентрической*.

Введем основные линии и точки небесной сферы (рис. 1.4).

Вертикальная (отвесная) линия — прямая ZZ' , проходящая через центр небесной сферы и параллельная линии действия силы тяжести в данном месте. Она пересекается с небесной сферой в точках, именуемых *зенитом* Z (расположен над головой наблюдателя) и *надиром* Z' . Перпендикулярно отвесной линии через центр небесной сферы проходит горизонтальная плоскость, которая в пересечении с небесной сферой дает *математический (истинный) горизонт*.

Через центр небесной сферы параллельно оси вращения Земли проходит *ось мира*, пересекающаяся с небесной сферой в двух точках P и P' — *полюсах мира*. Один из них располагается близ Полярной звезды (α Urs min) и называется *северным полюсом*, а второй — *южным*. Северный полюс отстоит от плоскости горизонта на угловом расстоянии, равном географической широте места.

Перпендикулярно оси мира через центр небесной сферы проводится *плоскость небесного экватора*, пересекающаяся с небесной сферой по большому кругу QQ' , называемому *небесным экватором*.

Через ось мира и вертикальную прямую проходит *плоскость небесного меридиана*, которая в сечении с небесной сферой дает *небесный меридиан*. Последний пересекается с математическим горизонтом в *точках юга* S и *севера* N , причем точкой севера будет та из точек пересечения, которая ближе к северному полюсу мира.

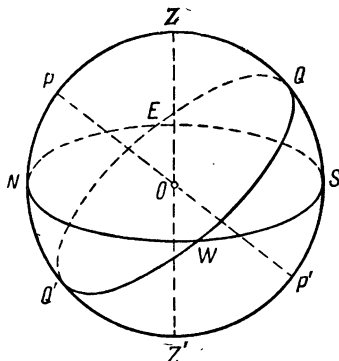


Рис. 1.4.

Небесный экватор пересекается с горизонтом в *точке запада* W и *точке востока* E .

Любая вертикальная плоскость пересекается с небесной сферой по большому кругу, называемому *вертикалом*. Вертикал, проходящий через точки востока и запада, называется *первым*.

Плоскость, проходящая через центр небесной сферы параллельно плоскости гелиоцентрической орбиты центра масс Земли и Луны, называется *плоскостью эклиптики* (рис. 1.5). Эта плоскость пересекается с небесной сферой по большому кругу qq' — *эклиптике*. Угол ϵ между плоскостями эклиптики и экватора — *наклон эклиптики* (или *наклонение*) к экватору — приблизительно равен $23^{\circ}27'$. На XII Генеральной ассамблее Международного Астрономического Союза для ϵ было принято значение $\epsilon = 23^{\circ}27'08''$, 26 (в эпоху 1900,0).

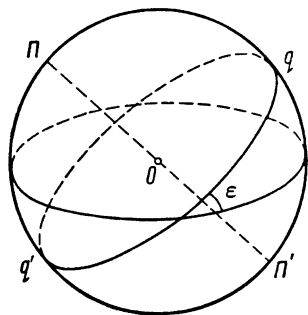


Рис. 1.5.

Эклиптика пересекается с экватором в *точках весеннего и осеннего равноденствия*. Первая из этих точек, в которой Солнце бывает в день весеннего равноденствия, обозначается символом Υ , а другая — символом \cap . Эклиптике соответствуют два полюса Π и Π' , причем ближайший из них к северному полюсу мира есть *северный полюс эклиптики*, а другой — *южный*.

Ни плоскость экватора, ни плоскость эклиптики, а стало быть, и ни соответствующие им точки пересечения не сохраняют своего положения неизменным во времени. Поэтому при использовании этих плоскостей и точек следует всегда указывать эпоху, которой они соответствуют. Точные положения экватора, эклиптики и равноденственных точек приводятся в астрономических ежегодниках.

Системы координат. Как и небесные сферы, системы координат изменяются в зависимости от положения начала координат. Система координат называется *топоцентрической*, *планетоцентрической*, *гелиоцентрической*, *геоцентрической* и т. д. в зависимости от того, совпадает ли начало координат соответственно с какой-либо точкой поверхности планеты, ее центром или центром Солнца, Земли и пр.

Любая из употребляемых в астрономии систем криволинейных координат строится на основе некоторой прямоугольной декартовой системы координат. Для задания такой системы достаточно указать: начало координат, основную плоскость и ось абсцисс.

Обычно от прямоугольных координат переходят к сферическим координатам: двум угловым координатам и полярному радиусу. В зависимости от выбора начала координат этот полярный радиус называется *геоцентрическим радиусом-вектором* (если начало координат в центре Земли), *селеноцентрическим радиусом-вектором* (если начало координат находится в центре Луны), в топоцентрической системе координат его называют *наклонной дальностью* и т. д.

Так как чаще всего в небесной механике приходится иметь дело с угловыми величинами, то в астрономических системах координат при их введении определяют лишь угловые координаты.

Горизонтальная система координат. Основная плоскость ее — плоскость горизонта. Положение точки на небесной сфере задается двумя углами (дугами) (рис. 1.6): *высотой* и *азимутом*. Высота h есть угловое расстояние небесного объекта от плоскости горизонта. Высота h считается положительной над горизонтом и изменяется в пределах от -90° до $+90^{\circ}$. Вместо высоты удобно использовать ее дополнение до 90° , называемое *зенитным расстоянием* z ($z = 90^{\circ} - h$). Вторая координата, азимут A — это дуга, отсчитываемая вдоль математического горизонта от точки юга в западном направле-

нии до проекции небесного объекта на горизонт. В астрономических расчетах азимут принято отсчитывать в пределах от 0° до 360° .

Первая экваториальная система координат. Основная плоскость — плоскость небесного экватора. Положение небесного объекта задается двумя сферическими координатами (рис. 1.7): *склонением* δ и *часовым углом* t . Склонение — это угловое расстояние небесного объекта от экватора. Оно изменяется в пределах от -90° до $+90^\circ$, причем считается положительным в северном полушарии небесной сферы. Вторая координата — часовой угол отсчитывается от южной стороны меридиана вдоль экватора до проекции небесного объекта на экватор. Направление отсчета часового угла совпадает

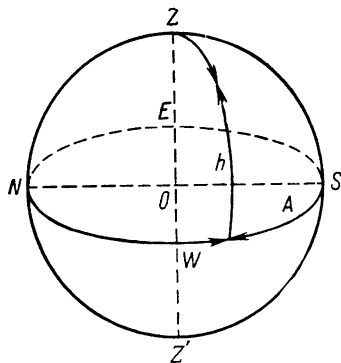


Рис. 1.6.

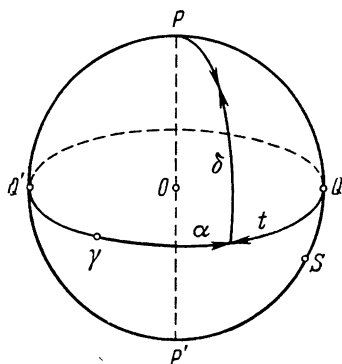


Рис. 1.7.

с ходом часовой стрелки, если на небесную сферу смотреть с северного полюса мира. Часовой угол измеряется в часовой мере и всегда заключен в пределах от 0^h до 24^h .

Вторая экваториальная система координат. От первой экваториальной системы отличается одной из координат, а именно вместо часового угла во второй системе используется *прямое восхождение* α (рис. 1.7). Прямое восхождение есть дуга, отсчитываемая от точки весеннего равноденствия до проекции небесного объекта на экватор в сторону, противоположную отсчету часовых углов. Прямое восхождение измеряется в часовой мере в пределах от 0^h до 24^h .

Эклиптическая система координат. Основной плоскостью служит плоскость эклиптики. Одна из координат, *широта* β , есть угловое расстояние небесного объекта от плоскости эклиптики. Широта заключена в пределах от -90° до $+90^\circ$, причем широты положительны в северном полушарии (т. е. в полушарии, в котором лежит северный полюс мира). Второй координатой служит *долгота* λ , отсчитываемая от точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики в сторону, противоположную ходу часовой стрелки (если смотреть на небесную сферу с северного полюса эклиптики), до проекции небесного объекта на эклиптику. Долгота изменяется в пределах от 0° до 360° .

Формулы преобразования экваториальных координат в горизонтальные:

$$\left. \begin{aligned} \sin z \sin A &= \cos \delta \sin t, \\ \sin z \cos A &= -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t, \\ \cos z &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Формулы преобразования горизонтальных координат в экваториальные:

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A, \\ \cos \delta \cos t &= \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos A, \\ \sin \delta &= \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Формулы преобразования экваториальных координат в эклиптические:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha, \\ \sin \beta &= \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Аналогичные формулы преобразования от эклиптических координат к экваториальным и т. д. можно получить, рассматривая соответствующий сферический треугольник и применяя формулы сферической тригонометрии.

В ряде задач бывает необходимо задавать положение плоскостей, больших кругов и т. д. в пространстве. Обычно это делается следующим образом. Пусть требуется задать положение плоскости относительно экваториальной системы координат. С этой целью рассматривают положение линии узлов — линии пересечения данной плоскости с плоскостью экватора. Линия узлов пересекается с небесной сферой в двух точках — восходящем и нисходящем узлах (на рис. 1.8 они соответственно обозначены через \mathcal{U} и \mathcal{U}'). За одну из величин, характеризующих положение данной плоскости, принимают долготу восходящего узла \mathcal{U} , т. е. угловое расстояние восходящего узла от точки весеннего равноденствия.

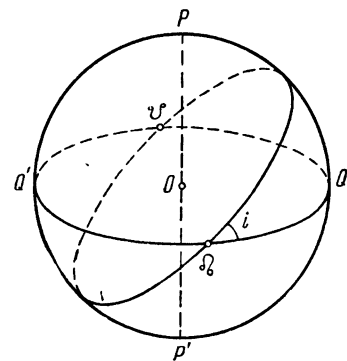


Рис. 1.8.

За вторую величину выбирается угол i , составляемый плоскостью с экватором. Этот угол называется *наклонностью* (наклоном) к плоскости экватора.

Л и т е р а т у р а: основная — [1]—[3], дополнительная — [4], [5], [8].

ЗАДАЧИ

1. Может ли быть наблюдаем достаточно удаленный космический объект на географической широте $\varphi = 60^\circ$, если плоскость его орбиты наклонена к экватору под углом $i = 10^\circ$?

2. Выясните, будет ли видима космическая ракета, экваториальные координаты которой равны $\alpha = 6^{\text{h}}40^{\text{m}}$, $\delta = -5^\circ 20'$ на географической широте $\varphi = -55^\circ$. Радиус Земли пренебрежимо мал по сравнению с геоцентрическим расстоянием ракеты.

3. В нижней кульминации, т. е. в момент прохождения через северную сторону меридиана (под северным полюсом мира), зенитное расстояние космического аппарата было равным z , а его угловое расстояние от северного полюса мира составляло в этот момент p . Определите географическую широту φ места, где было выполнено это наблюдение.

4. Из наблюдений двух искусственных спутников Земли в верхней кульминации, т. е. в момент их прохождения через меридиан южнее северного полюса мира, были получены их зенитные расстояния z_1 и z_2 . В момент наблюдения склонение первого спутника было равно δ_1 . Определите склонение δ_2 второго спутника в этот момент времени. Найдите географическую широту φ места наблюдения.

5. Прямое восхождение и склонение кометы 1907, III в момент наблюдения оказались равными $\alpha = 10^{\text{h}}44^{\text{m}}29^{\text{s}},10$, $\delta = 23^\circ 07' 40''$. Вычислите эклиптические координаты кометы в этот момент, приняв наклонение эклиптики к экватору равным $\varepsilon = 23^\circ 27'$.

6. Экваториальные координаты космической ракеты в момент ее наблюдения со станции слежения, расположенной на географической широте $\varphi = 55^\circ 45'$, были равны $t = 3^{\text{h}}21^{\text{m}}20^{\text{s}}$, $\delta = 38^\circ 43' 48''$. Вычислите горизонтальные координаты ракеты в этот момент времени.

7. Найдите точки небесной сферы, для которых склонение и прямое восхождение равны соответственно эклиптической широте и долготе.

8. Найдите геометрическое место точек на небесной сфере, для которых прямое восхождение равно долготе.

9. Из наблюдений космической ракеты вскоре после ее прохождения через восходящий узел для двух моментов времени были определены ее геоцентрические экваториальные координаты: α_1 , δ_1 и α_2 , δ_2 , причем $\alpha_2 - \alpha_1 < 6^{\text{h}}$. Считая, что ракета движется в плоскости, проходящей через центр Земли, определите долготу Ω восходящего узла ее орбиты.

10. Искусственный спутник Земли движется по плоской геоцентрической орбите. Из наблюдений для четырёх различных моментов времени были получены его экваториальные геоцентрические координаты:

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = 2^{\text{h}}, & \alpha_2 = 4^{\text{h}}, & \alpha_3 = 5^{\text{h}}, & \alpha_4 = 6^{\text{h}}, \\ \delta_1 = 0^\circ, & \delta_2 = 16^\circ 14', & \delta_3 = 22^\circ 13', & \delta_4 = 31^\circ 07'. \end{array}$$

Покажите, что при наблюдениях была допущена грубая ошибка. Укажите, какое из наблюдений ошибочно.

11. В момент выхода на геоцентрическую орбиту спутник находился в экваториальной плоскости и имел прямое восхождение $\alpha_0 = 2^{\text{h}}29^{\text{m}}$. Расчетное наклонение его орбиты к плоскости экватора выбиралось таким образом, чтобы спутник проходил через точку с экваториальными координатами $\alpha = 4^{\text{h}}44^{\text{m}}48^{\text{s}}$, $\delta = 14^\circ 53'$. Через некоторое время после выхода на орбиту из наблюдений спутника были найдены его экваториальные координаты $\alpha^* = 4^{\text{h}}52^{\text{m}}08^{\text{s}}$, $\delta^* = 22^\circ 36'$. Выясните, пройдет ли спутник через расчетную точку или нет.

12. Космический корабль совершает перелет в плоскости эклиптики внутри земной орбиты. Штурман корабля намерен определить положение P своего корабля в гелиоцентрической системе координат, в которой долгота λ произвольного пункта P измеряется углом между гелиоцентрическими направлениями SR на навигационную звезду Регул (α Leo) и точку P (угол $\lambda = \angle RSP$ считается положительным, если поворот луча SR до совпадения с SP направлен в сторону движения Земли по ее орбите). Из астрономических таблиц штурман определяет долготу λ_2 Земли E и ее гелиоцентрическое расстояние r_2 в данный момент времени. Затем из наблюдений штурман находит, что $\angle SPR = \lambda'$ и $\angle EPR = \lambda'_2$. Каким образом он может вычислить координаты корабля: его гелиоцентрическое расстояние r и долготу λ ?

13. Пусть T_1 и T_2 — две станции слежения за спутниками. Известны их прямоугольные координаты в геоцентрической экваториальной системе координат, ось абсцисс которой направлена в точку весеннего равноденствия. В один и тот же момент времени на этих двух станциях наблюдался спутник S , причем его топоцентрические координаты оказались соответственно равными α_1, δ_1 и α_2, δ_2 . Каким образом по этим данным можно найти прямоугольные геоцентрические экваториальные координаты x, y, z спутника и его геоцентрическое расстояние?

14. Станция наблюдения за космическими объектами расположена в пункте с географическими координатами $\lambda = -6^h, \varphi = 30^\circ$. В момент наблюдения спутник S проходил через зенит точки земной поверхности S_1 с географическими координатами $\lambda_1 = -4^h, \varphi_1 = 15^\circ$. Вычислите азимут спутника, считая Землю шаром.

15. Экваториальный спутник S должен пройти над пунктом P , имеющим географическую долготу $\lambda = -105^\circ$, на геоцентрическом расстоянии $R_s = 42\,190$ км. В этот момент спутник будет наблюдаться на станции T , расположенной в пункте с географическими координатами $\lambda_0 = -6^h, \varphi_0 = 40^\circ$. Вычислите горизонтальные координаты спутника в этот момент времени, считая Землю шаром.

§ 4. Измерение времени

Справочные сведения

Звездное время. Один из способов измерения времени связан с изучением видимого движения точки весеннего равноденствия на небесной сфере. В этом способе за единицу времени принимают промежуток времени между двумя последовательными прохождением точки весеннего равноденствия через южную сторону меридиана (верхними кульминациями). Эта единица времени называется *звездными сутками*. Звездные сутки состоят из 24 звездных часов; в одном звездном часе содержится 60 звездных минут, а звездная минута делится на 60 звездных секунд.

За начало звездных суток в данном месте принимается момент верхней кульминации точки весеннего равноденствия в данном месте наблюдения.

Время, протекшее от начала звездных суток, измеряется часовым углом точки весеннего равноденствия. Можно сказать, что *звездное время равно часовому углу точки весеннего равноденствия* *).

Для любого небесного объекта справедлива формула

$$s = \alpha + t, \quad (1)$$

в которой s — звездное время в момент наблюдения, а t и α — соответственно часовой угол и прямое восхождение наблюдаемого объекта в тот же момент времени.

Если небесный объект находится в верхней кульминации, то звездное время равно его прямому восхождению.

Истинное и среднее солнечное время. При измерении времени по Солнцу за единицу времени принимается промежуток времени между двумя последовательными верхними кульминациями центра Солнца. Эта единица времени называется *истинными солнечными сутками*. Время, протекшее от момента верхней кульминации центра истинного Солнца, т. е. от истинного полудня до данного момента, измеряется часовым углом центра истинного Солнца.

Из-за неравномерности видимого движения Солнца истинным солнечным временем не пользуются. Вместо истинного Солнца вводят некоторую фиктивную точку, которой сообщают равномерное движение по небесному экватору (относительно «неподвижных» звезд) с периодом, равным *звездному году* (промежутку времени, в течение которого Солнце делает полный оборот на небесной сфере относительно «неподвижных» звезд). Эта фиктивная точка называется *средним экваториальным Солнцем*. Она начинает свое годовичное движение вместе с центром истинного Солнца, одновременно выходя из точки весеннего равноденствия.

Момент прохождения среднего экваториального Солнца через южную сторону меридиана (верхнюю кульминацию) называется *средним полуднем*, а момент нижней кульминации — *средней полночью*. За единицу времени принимают *средние солнечные сутки*, равные промежутку времени между двумя последовательными верхними кульминациями среднего экваториального Солнца. Средние сутки делятся на 24 средних часа, один средний час — на 60 средних минут, а одна средняя минута — на 60 средних секунд. Время, протекшее от среднего полудня до данного момента, измеряется часовым углом среднего экваториального Солнца.

Истинное и среднее солнечное время связаны друг с другом уравнением времени. С точностью до $0^m,1$ оно записывается в виде

$$\Delta t = -9^m,9 \sin 2\alpha_{\odot} + 7^m,7 \sin (\alpha_{\odot} + 79^{\circ}), \quad (2)$$

где Δt — разность между средним и истинным солнечным временем, α_{\odot} — прямое восхождение среднего экваториального Солнца. Точная связь между истинным и средним временем устанавливается с помощью Астрономического Ежегодника.

Связь между звездным и средним солнечным временем. Сначала рассмотрим перевод интервалов звездного времени в интервалы среднего времени и обратно. С этой целью обратимся к единице времени, называемой *тропическим годом*. Он представляет собой промежуток времени между двумя последовательными прохождениями среднего экваториального Солнца через точку весеннего равноденствия. Число средних солнечных суток в тропическом году равно на единицу менее числа звездных суток и равно 365,2422... Отсюда следует, что одни средние солнечные сутки

*) Фактически звездное время вводится более сложным образом, поскольку точка весеннего равноденствия движется неравномерно. В астрономии при точных расчетах рассматриваются *истинное*, *квазиистинное* и *среднее звездное время*.

в единицах звездного времени равны $24^{\text{h}}03^{\text{m}}56^{\text{s}},555$, а одни звездные сутки содержат $23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}},09$ единиц среднего солнечного времени. Полезно помнить, что

1^{h} среднего солнечного времени = $1^{\text{h}}09^{\text{s}},8586$ звездного времени,
 1^{m} среднего солнечного времени = $1^{\text{m}}0^{\text{s}},1643$ звездного времени,
 1^{s} среднего солнечного времени = $1^{\text{s}},00027$ звездного времени,
 а также

1^{h} звездного времени = $59^{\text{m}}50^{\text{s}},1704$ среднего солнечного времени,
 1^{m} звездного времени = $58^{\text{s}},8362$ среднего солнечного времени,
 1^{s} звездного времени = $0^{\text{s}},9973$ среднего солнечного времени.

В астрономических ежегодниках даются таблицы для перевода интервалов звездного времени в солнечное и обратно.

При переводе звездного времени в среднее необходимо еще определить звездное время в средней местную полночь. Это выполняется с помощью астрономического ежегодника, где на каждый день года дается звездное время в среднюю гринвичскую полночь. Извлекая это значение из ежегодника, в него следует внести редукцию за географическую долготу. Если расчет выполняется для места с географической долготой λ , выраженной в часовой мере, то редукция будет равна $-9^{\text{s}},8565 \lambda$, причем она будет отрицательной для восточных долгот и положительной — для западных долгот.

Гражданское, поясное и декретное время. За начало отчета суток в среднем солнечном времени принят средний местный полдень. Наряду с этим имеется гражданский счет времени с началом суток в среднюю местную полночь.

Гражданское среднее время равно среднему солнечному времени $+12^{\text{h}}$.

Для удобства счета времени весь земной шар разбит на 24 часовых пояса и в каждом поясе введено свое *поясное время*. Нулевой часовой пояс заключен между меридианами с долготами от $-0^{\text{h}}30^{\text{m}}$ до $+0^{\text{h}}30^{\text{m}}$. В этом поясе принят гражданское время нулевого (гринвичского) меридиана. Это время называется *всемирным (мировым) временем* и сокращенно обозначается буквами UT (от английских слов universal time). Первый часовой пояс лежит между меридианами с географическими долготами $0^{\text{h}}30^{\text{m}}$ и $1^{\text{h}}30^{\text{m}}$. В нем принято гражданское время для меридиана с долготой 1^{h} . Аналогичным образом выделены и другие часовые пояса (в границах ряда поясов имеются отступления от указанного выше способа разбивания).

В СССР с 16 июня 1930 г. введен новый счет времени — *декретное время* *). Оно равно поясному времени для данного места плюс один час.

Близ меридиана с восточной долготой 12^{h} проведена *линия перемены дат*.

Юлианские дни. Во многих расчетах удобно пользоваться непрерывным счетом суток, который в астрономии получил название *юлианских дней*. За начало счета юлианских дней принято 1 января 4713 г. до нашей эры. За начало юлианского дня принимается средний гринвичский полдень рассматриваемой даты. Переход от даты общеупотребительного григорианского календаря к юлианским дням выполняется с помощью специальных таблиц, публикуемых в астрономических ежегодниках. Сокращенно юлианские дни принято обозначать латинскими буквами JD.

Юлианские дни удобны при расчете звездного времени s_0 в среднюю гринвичскую полночь, которое вычисляется по формуле

$$s_0 = 99^{\circ}, 6909833 + 36000^{\circ}, 7689T + 0^{\circ}, 00038708T^2, \quad (3)$$

*) В условиях задач обычно, если не будет специальной оговорки, под московским временем будет пониматься московское декретное время.

где время T измерено в столетиях и определяется из соотношения

$$T = \frac{JD - 2415020}{36525}, \quad (4)$$

причем звездное время s_0 выражено в градусах.

Эфемеридное время. Из-за неравномерности вращения Земли вокруг своей оси все введенные способы измерения времени не обеспечивают постоянства единицы времени. Поэтому было введено *эфемеридное время*, сокращенно обозначаемое буквами ET (от английского ephemeris time). Эфемеридное время определяется формулой

$$ET = UT + \Delta T, \quad (5)$$

в которой ΔT — годовое изменение, приводящееся в астрономических ежегодниках в специальных таблицах.

Поскольку секунда среднего солнечного времени может различаться от секунды эфемеридного времени на величину порядка 10^{-7} , то его употребление необходимо только в особо точных расчетах.

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [3], дополнительная — [4], [5], [8].

ЗАДАЧИ

1. Найдите юлианскую дату в момент 1985, янв., $1,6^h 48^m$ UT.
2. Вычислите всемирное время в момент, для которого юлианская дата равна 2 443 744, 72 942.
3. Искусственный спутник проходил над Москвой ($\lambda = 2^h 30^m$) 15 июля 1970 г. в $10^h 10^m$ по московскому декретному времени. Найдите среднее солнечное время в Москве в момент наблюдения спутника.
4. В пункте А с долготой $\lambda_1 = 2^h 1^m 18^s$, 57 был зафиксирован момент верхней кульминации космической ракеты, прямое восхождение которой в этот момент составляло $\alpha = 12^h 10^m 03^s$. Через 2^h среднего солнечного времени в пункте В с долготой $\lambda_2 = 2^h 30^m 17^s$ наблюдатель зарегистрировал прохождение искусственного спутника через южную сторону меридиана. Определите прямое восхождение этого спутника в момент наблюдения.
5. Чему равно звездное время в пункте с долготой $\lambda = 2^h 30^m 17^s$ в момент времени 1962, окт., 12, $10^h 15^m 30^s$ UT?
6. Местное среднее время станций слежения за спутниками, расположенной на восточной долготы $\lambda = 2^h 56^m 21^s$, 4, в момент наблюдения было равно $6^h 10^m 30^s$, 0. Найдите поясное и декретное время в данный момент.
7. В пункте, расположенном на восточной долготы $\lambda = 3^h 20^m 30^s$, 2, 24 октября 1957 г. истинное солнечное время было $7^h 54^m 15^s$, 6. Найдите для этого момента местное среднее время.
8. 1 марта 1957 г. в населенном пункте, находящемся на восточной долготы $\lambda = 4^h 30^m$, местное звездное время в момент приземления метеорологической ракеты было $12^h 15^m 30^s$, 0. Найдите местное среднее солнечное время в этом пункте в указанный момент.

9. Наблюдатель, находившийся в пункте с географической долготой $\lambda = 6^{\text{h}}00^{\text{m}}40^{\text{s}}$, зафиксировал, что встреча двух космических объектов произошла 31 октября 1960 г. в $19^{\text{h}}47^{\text{m}}23^{\text{s}}$, 7 по среднему местному времени пункта с долготой $2^{\text{h}}30^{\text{m}}17^{\text{s}}$. Найдите местное звездное время в пункте наблюдения в этот момент.

§ 5. Основные редукции астрономических координат

Справочные сведения

Рефракция. Вследствие преломления светового луча в земной атмосфере видимое положение космического объекта на небесной сфере отличается от его истинного положения. Угловое отклонение светового луча, возникающее при его прохождении через земную атмосферу, называется *рефракцией*. Вообще говоря, рефракция зависит от метеорологических условий (температуры различных слоев атмосферы, плотности и т. д.). При точном учете рефракции пользуются специальными таблицами рефракции (например, «Пулковскими таблицами»), помещаемыми в астрономических ежегодниках.

Однако часто достаточно пользоваться приближенной теорией рефракции, разработанной для средних метеорологических условий. Она приводит к следующей формуле для рефракции:

$$R = 60'' \cdot 2 \frac{b}{760} \cdot \frac{273,2}{273,2 + t} \operatorname{tg} z', \quad (1)$$

где b — атмосферное давление в месте наблюдения, выраженное в мм, t — температура воздуха в градусах шкалы Цельсия, z' — видимое зенитное расстояние.

Рефракция всегда приподнимает светило над горизонтом, поэтому истинное зенитное расстояние z равно

$$z = z' + R. \quad (2)$$

Аберрация света. *Аберрация* представляет собой угловое смещение светового луча, обусловленное движением наблюдателя в пространстве. Видимое положение небесного объекта вследствие аберрации оказывается смещенным относительно истинного положения в сторону движения наблюдателя — *апекса* движения. Приближенно аберрационное смещение равно

$$\zeta = \mu \sin \varphi, \quad (3)$$

где ζ — аберрационное смещение, μ — отношение скорости наблюдателя к скорости света, φ — угловое расстояние небесного объекта от апекса движения.

Одно из аберрационных смещений, *годи́чная аберрация*, обусловлено годичным движением Земли вокруг Солнца. Вследствие годичной аберрации «неподвижные» звезды описывают на небесной сфере эллипсы.

Формулы редукции экваториальных координат за годичную аберрацию имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \mu \cos \delta_0 \sin(\alpha_0 - \alpha) \sec \delta, \\ \delta' - \delta &= \mu [\sin \delta_0 \cos \delta - \cos \delta_0 \sin \delta \cos(\alpha_0 - \alpha)], \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где α' и δ' — видимое прямое восхождение и склонение, а α и δ — истинное прямое восхождение и склонение небесного объекта, α_0 и δ_0 — прямое восхождение и склонение апекса движения наблюдателя.

Рабочие формулы, которыми обычно пользуются, записываются в виде.

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Cc + Dd, \\ \delta' - \delta &= Cc' + Dd', \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где C, D — функции времени, табулированные в астрономических ежегодниках, а величины c, c', d, d' определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{1}{15} \cos \alpha \sec \delta, & d &= \frac{1}{15} \sin \alpha \sec \delta, \\ c' &= \operatorname{tg} \epsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta, & d' &= \cos \alpha \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. При рассмотрении тел Солнечной системы необходимо вводить поправки на «конечность» расстояния от наблюдателя до небесного тела. С этой целью вычисляется *абберационное время* τ , равное времени прохождения света от источника до наблюдателя, по формуле

$$\tau = 498^s,5 \frac{\Delta}{a}, \quad (7)$$

где Δ — расстояние между наблюдателем и небесным объектом, а a — большая полуось земной орбиты.

Прежде чем пользоваться формулами для редукций за абберацию, необходимо привести видимые координаты небесного тела к моменту наблюдения. Для этого скорости изменения сферических координат за единицу времени умножают на абберационное время и прибавляют к видимым координатам.

П а р а л л а к с. Кажущееся смещение небесного объекта на небесной сфере, происходящее при замене одного места наблюдения другим, называется *параллактическим смещением*. Это смещение происходит в плоскости большого круга, проходящего через положение небесного объекта на небесной сфере и апекс перемещения наблюдателя. Угловое расстояние между небесным объектом и апексом перемещения наблюдателя за счет параллактического смещения возрастает. Величина параллактического смещения описывается приближенной формулой

$$\zeta = \frac{\rho}{\Delta} \sin z, \quad (8)$$

где ζ — параллактическое смещение, z — угол с вершиной в точке наблюдения между направлениями на апекс и небесный объект, ρ — линейное перемещение наблюдателя, Δ — расстояние от точки наблюдения до небесного объекта.

С у т о ч н ы й п а р а л л а к с. При выполнении астрономических наблюдений необходимы топоцентрические координаты небесного объекта. Из наблюдений непосредственно также получают топоцентрические координаты. Они зависят от положения наблюдателя на поверхности Земли. Поэтому в астрономических ежегодниках принято давать геоцентрические координаты, не зависящие от положения наблюдателя на поверхности Земли. При перемещении наблюдателя также происходит параллактическое смещение небесного объекта. Все отмеченные вопросы рассматриваются в теории суточного параллакса.

В этой теории основную роль играет *горизонтальный параллакс*. Под ним понимают угол, под которым с небесного объекта, находящегося в плоскости горизонта места наблюдения, виден радиус Земли, проведенный в точку наблюдения. Поскольку Земля имеет сфероидальную форму, то радиус Земли, проведенный в точку наблюдения, зависит от географических координат этой точки. Поэтому обычно вместо горизонтального параллакса рассматривают так называемый *горизонтальный экваториальный параллакс*, т. е. угол, под которым с небесного объекта, находящегося в плоскости земного экватора, виден экваториальный радиус Земли, проведенный в точку наблюдения. Если этот угол обозначить через π , то для него будем иметь

$$\sin \pi = \frac{a_3}{\Delta}, \quad (9)$$

где Δ — геоцентрическое расстояние небесного объекта, a_3 — экваториальный радиус Земли.

Обозначая через ρ_0 отношение радиуса ρ Земли для точки наблюдения к экваториальному радиусу Земли a_3 , получим

$$\frac{\rho}{\Delta} = \rho_0 \sin \pi. \quad (10)$$

Это отношение удобно использовать при расчетах параллактического смещения Луны и других близких к Земле тел.

Горизонтальный экваториальный параллакс близких к Земле небесных тел меняется вместе с изменением их геоцентрических расстояний. Поэтому, например, для Луны в Астрономическом Ежегоднике СССР дается таблица ее горизонтального экваториального параллакса.

Для Солнца и планет пользуются иным представлением:

$$\frac{\rho}{\Delta} = \rho_0 \frac{a}{\Delta} \sin \pi_0, \quad (11)$$

где

$$\sin \pi_0 = \frac{a_3}{a}, \quad (12)$$

причем a — среднее расстояние от Земли до Солнца. Величина π_0 называется *горизонтальным экваториальным параллаксом Солнца*. По решению XII Генеральной ассамблеи Международного Астрономического Союза (Гамбург, 1964 г.) принято значение $\pi_0 = 8'',79405$.

Пусть α', δ', t' — соответственно топоцентрическое прямое восхождение, склонение и часовой угол небесного тела, α, δ, t — геоцентрическое прямое восхождение, склонение и часовой угол, Δ — геоцентрическое расстояние тела, а φ' — геоцентрическая широта места наблюдения. Формулы редукции экваториальных координат небесного тела запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\frac{1}{15\Delta} \pi_0 \rho_0 \cos \varphi' \sec \delta \sin t, \\ \delta' - \delta &= -\frac{1}{\Delta} \pi_0 \rho_0 \sin \varphi' \operatorname{cosec} \gamma \sin (\gamma - \delta), \\ \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \varphi' \sec t. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Здесь $\alpha' - \alpha$ выражено в секундах времени, а $\delta' - \delta$ — в секундах дуги.

При переходе от топоцентрических координат к геоцентрическим в этих формулах следует поменять местами геоцентрические и топоцентрические координаты.

Годичный параллакс. Годичное параллактическое смещение небесных объектов вызвано гелиоцентрическим движением Земли. При перемещении Земли наблюдаемые координаты небесных тел претерпевают изменения. Поэтому возникает задача о переходе от геоцентрических координат небесных тел к гелиоцентрическим.

При расчетах годичного параллактического смещения вводится угол π , определяемый равенством

$$\sin \pi = \frac{a}{\Delta}, \quad (14)$$

в котором a — среднее расстояние от Земли до Солнца, а Δ — гелиоцентрическое расстояние небесного тела. Величина π называется *годичным параллаксом* и представляет собой тот угол, под которым видно с небесного тела среднее расстояние от Земли до Солнца, когда это тело находится в плоскости, проведенной через центр Земли, перпендикулярно радиусу земной орбиты.

Формулы редукции экваториальных координат небесного тела за годичный параллакс имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \frac{1}{15} \pi \cos D \sin (A - \alpha) \sec \delta, \\ \delta' - \delta &= \pi [\sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos (A - \alpha)], \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где α' , δ' — геоцентрические прямое восхождение и склонение, α , δ — гелиоцентрические прямое восхождение и склонение, а A , D — геоцентрические прямое восхождение и склонение Солнца в рассматриваемый момент времени. Приращение $\alpha' - \alpha$ выражено в часовой мере, а $\delta' - \delta$ — в секундах дуги.

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [3], дополнительная — [4] — [7].

ЗАДАЧИ

1. Космический аппарат наблюдался в вертикале звезды α Волопаса (α Boo) и высота его превосходила высоту указанной звезды на $2'$. В момент наблюдения видимое зенитное расстояние звезды было $40^{\circ}57'48''$. На станции наблюдения давление воздуха составляло $755,33$ мм, а температура равнялась $-11^{\circ},5$ по Цельсию. Вычислите истинное зенитное расстояние космического аппарата в момент наблюдения с точностью до $1''$.

2. Установите, при каких условиях влияние рефракции на склонение космического объекта максимально. При каких условиях рефракция не изменяет его склонения?

3. Выясните, при каких условиях рефракция не изменяет прямого восхождения космического объекта.

4. Предполагая, что рефракция по зенитному расстоянию дается формулой $R = a \operatorname{tg} z$, где a — малая постоянная величина, покажите, что влияние рефракции на часовой угол околополярной звезды максимально, если параллактический угол звезды равен 90° .

5. Незадолго до сближения двух космических аппаратов из наблюдений были получены их видимые топоцентрические горизонтальные координаты A_1, z_1 и A_2, z_2 . Считая разности одноименных координат космических аппаратов малыми величинами, получите топоцентрическое угловое расстояние между ними в этот момент, освободив его от влияния рефракции. Каково различие в наблюдаемом и истинном угловом расстоянии между аппаратами?

6. Выведите формулы для годичной аберрации в эклиптических координатах. Найдите траекторию видимого движения космического объекта на небесной сфере и установите направление движения.

7. Считая движение Солнца вдоль эклиптики равномерным, покажите, что для любых четырех моментов времени, разделенных друг от друга интервалом в три месяца, видимые положения небесного объекта находятся на концах двух сопряженных диаметров эллипса годичной аберрации.

8. Покажите, что аберрацию, обусловленную вращением Земли вокруг ее оси (суточная аберрация), можно учесть, вводя в момент наблюдения отрицательную поправку $-\mu \sin z$, где $\mu = 0'',319$ — постоянная суточной аберрации, z — зенитное расстояние небесного тела.

9. Искусственный спутник кульминирует в зените. Покажите, что видимая кульминация спутника происходит позднее истинной. Найдите численное значение этого запоздания.

10. Наблюденные топоцентрические экваториальные координаты космической ракеты, запущенной в сторону Венеры, в $22^{\text{h}}46^{\text{m}}48^{\text{s}}$ московского звездного времени следующие: $\alpha = 21^{\text{h}}15^{\text{m}}18^{\text{s}}$, $\delta = -16^{\circ}42'03''$, геоцентрическое расстояние было равно $\rho = 0,814$ а. е. Широта Москвы $\varphi = 55^{\circ}45'$. Вычисление на тот же момент геоцентрические координаты ракеты для номинальной траектории $\delta_0 = -16^{\circ}41'43''$, $\alpha_0 = 21^{\text{h}}15^{\text{m}}19^{\text{s}}$. Найдите отклонение истинных геоцентрических экваториальных координат ракеты в этот момент от их расчетных значений.

11. Найдите границы изменения расстояния Луны от Земли, зная, что горизонтальный экваториальный параллакс Луны колеблется в пределах от $61',5$ до $53',9$.

12. Звезда имеет астрономическую широту $\beta = 0$. В каких точках орбиты будет находиться Земля, когда смещение звезды вследствие годичной аберрации равно нулю?

13. Звезда наблюдается в верхней кульминации к югу от зенита в местную полночь. В каком направлении она смещена вследствие годичной аберрации?

14. Даны видимые координаты звезды $\alpha = 0^{\text{h}}46^{\text{m}}45^{\text{s}},75$, $\delta = 57^{\circ}36'24'',3$. Найдите ее истинные координаты, если $\alpha_0 = 177^{\circ}59'55'',5$, $\delta_0 = 20^{\circ},47$ и $\epsilon = 23^{\circ}26'40'',15$.

15. Чему равен суточный горизонтальный параллакс Марса, когда эта планета находится в противостоянии на расстоянии $0,378$ а. е.?

16. В пункте, географическая широта которого равна $\varphi = 55^{\circ}42'0''$, а геодезическая высота 150 м, в момент звездного времени $14^{\text{h}}04^{\text{m}}11^{\text{s}}$ получены топоцентрические экваториальные координаты космического объекта $\alpha' = 14^{\text{h}}42^{\text{m}}20^{\text{s}}$, $\delta' = 10^{\circ}37'10''$ и топоцентрическое расстояние $\Delta = 3$ а. е. Определите геоцентрические координаты α и δ этого объекта.

17. Вычислите годичный параллакс в экваториальных координатах звезды Сириус (α Can maj) в среднюю гринвичскую полночь 1 января 1960 г. Экваториальные координаты Сириуса равны $\alpha = 6^{\text{h}}42^{\text{m}},7$, $\delta = -16^{\circ}37'$, параллакс $\pi = 0'',37$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», 1971.

2. Блажко С. Н., Курс сферической астрономии, изд. 2-е, Гостехиздат, 1954.
3. Куликов К. А., Курс сферической астрономии, изд. 2-е, «Наука», 1969.

Дополнительная

4. Вентцель М. К., Сферическая астрономия, Геодезиздат, 1952.
5. Загребин Д. В., Введение в астрометрию, «Наука», 1966.
6. Идельсон Н. И., Редукционные вычисления в астрономии, Приложение к Астрономическому Ежегоднику СССР на 1941 г., Изд-во АН СССР.
7. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, «Наука», 1965.
8. Эскобал П., Методы определения орбит, пер. с англ., «Мир», 1970.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. Ньютонский потенциал тела

Справочные сведения

Закон всемирного тяготения. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона две материальные точки с массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними

$$F = \frac{fm_1m_2}{r^2}. \quad (1)$$

Сила тяготения направлена по прямой, соединяющей эти точки. Здесь f — *постоянная тяготения (гравитационная постоянная)*. В системе CGS она имеет следующее значение:

$$f = 6,669 \cdot 10^{-8}.$$

В астрономических задачах часто применяется *гауссова постоянная k* , связанная с f соотношением

$$f = k^2.$$

При этом всегда используется астрономическая система единиц, в которой за единицу массы принята масса Солнца, за единицу длины — среднее расстояние между Солнцем и Землей, точнее, центром масс системы Земля—Луна, а за единицу времени — средние солнечные сутки. Гауссова постоянная равна

$$k = 0,01720209895.$$

При решении задач динамики космического полета, в которых основным притягивающим телом служит Земля, удобно пользоваться *геоцентрическим гравитационным параметром*, равным произведению постоянной тяготения на массу Земли m_3 :

$$fm_3 = 398603 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

Если основным притягивающим телом является Солнце, то применяется *гелиоцентрический гравитационный параметр fm_C* , где m_C — масса Солнца:

$$fm_C = 132718 \cdot 10^{15} \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

Аналогично вводится *селеноцентрический гравитационный параметр fm_L* , где m_L — масса Луны. Он равен

$$fm_L = 490237 \cdot 10^7 \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

Потенциал тяготения. Силловая функция (потенциал) тяготения двух точечных масс m_1 и m_2 определяется формулой

$$U = \frac{f m_1 m_2}{r}. \quad (2)$$

Потенциал тяготения твердого тела равен

$$U = f \int \frac{\sigma d\tau}{\Delta}, \quad (3)$$

где σ — плотность в текущей точке тела, $d\tau$ — элемент объема, Δ — расстояние от текущей точки тела до точки, для которой вычисляется значение потенциала. В случае объемной притягивающей массы интегрирование распространяется на объем, занятый притягивающим телом, для бесконечно тонких пластин (простого слоя) интегрирование ведется по поверхности, а в случае отрезка материальной кривой — вдоль кривой.

Сила тяготения дается формулой

$$F = \text{grad } U.$$

Компоненты силы по осям декартовой системы координат равны

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4)$$

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [3], дополнительная — [6], [7].

ЗАДАЧИ

1. Принимая за единицу массы массу куба дистиллированной воды (при температуре 4°C) с ребром единичной длины, выберите единицу времени так, чтобы постоянная тяготения была равна единице.

2. Масса Юпитера составляет $1/1047,355$ массы Солнца, а масса Земли — $1/329\,390$. Считая известным геоцентрический гравитационный параметр, определите гравитационный параметр Юпитера.

3. Какое из тел, Земля или Солнце, притягивает Луну сильнее? Отношение масс Луны и Земли принять равным $1/81$. Среднее расстояние Луны от Земли около $380\,000$ км, а расстояние от Земли до Солнца — около $15 \cdot 10^7$ км.

4. Гравиметрические определения ускорения силы тяжести дали в экваториальных точках на поверхности Земли значение $g = 9,78034$ м/сек². Экваториальный радиус Земли взять равным $a_3 = 6378,165$ км. Вычислите гравитационный параметр Земли.

5. Четыре равных однородных шара, каждый массы m , имеют своими центрами вершины квадрата со стороной a . На прямой, соединяющей середины двух противоположных сторон квадрата, на расстоянии a от его центра расположена материальная частица массы $4m$. Насколько изменится сила, с которой четверка шаров притягивает частицу, если общую массу шаров сосредоточить в центре квадрата?

6. Докажите, что силы притяжения двух однородных шаров одинаковой плотности в точках, лежащих на их поверхностях, относятся друг к другу как радиусы шаров.

7. Определите силовую функцию притяжения однородного прямолинейного отрезка массы m , имеющего длину $2l$.

8. Докажите, что силовую функцию тяготения однородного прямолинейного отрезка AB в произвольной, внешней по отношению к отрезку точке P можно представить в виде

$$U = \sigma \ln \frac{PA + NA}{PB + NB},$$

где σ — линейная плотность, а N — проекция точки P на отрезок AB .

9. Найдите силу притяжения однородной дугой точки единичной массы, помещенной в ее центре. Дуга описана радиусом R и опирается на угол 2α . Линейная плотность равна σ .

10. Покажите, что однородный прямолинейный отрезок AB притягивает внешнюю точку P так же, как однородная дуга окружности той же плотности с центром в точке P и радиусом, равным расстоянию от точки P до отрезка, заключенного внутри угла, под которым отрезок виден из точки P .

11. Однородная материальная прямая с линейной плотностью σ притягивает точку единичной массы, отстоящую от прямой на расстоянии h . Найдите силу притяжения. Покажите, что она равна силе притяжения однородной полуокружности той же плотности и радиуса h , центр которой совпадает с притягиваемой точкой.

12. Найдите силовую функцию притяжения однородной окружности радиуса R , линейная плотность которой равна σ .

13. Дана однородная окружность массы m с центром в точке O . Покажите, что ее ньютоновский потенциал на произвольно расположенную точку P равен

$$U = \frac{fm}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(PA)^2 \cos^2 \varphi + (PB)^2 \sin^2 \varphi}},$$

где A и B — концы диаметра окружности, направленного по проекции отрезка PO на плоскость окружности.

14. Найдите силу притяжения однородного кругового диска в произвольной точке прямой, проведенной через центр диска перпендикулярно его плоскости. Поверхностная плотность диска равна σ , а радиус диска — R .

15. Покажите, что сила притяжения однородного кругового диска в точках прямой, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости, при достаточно малых расстояниях от диска по модулю равна $2\pi f\sigma$, где σ — поверхностная плотность, и претерпевает в центр диска разрыв первого рода.

16. Вычислите абсолютную величину силы притяжения, вызываемого однородным телом вращения (или его частью, заключенной между двумя плоскостями, перпендикулярными его оси) в произвольной точке оси тела. Плотность тела равна σ .

17. Вычислите силу притяжения однородного сферического сегмента плотности σ в его вершине. Радиус сферы, которой принадлежит сегмент, равен r , а его высота — h .

18. Определите силу притяжения однородного конуса с высотой h в его вершине. Угол раствора конуса равен 2α , плотность σ .

19. Докажите, что все отсеки равной высоты от любого однородного конуса одинаково притягивают точку, лежащую в его вершине.

20. Найдите силу притяжения однородного сегмента параболоида вращения в его вершине. Параметр меридиональной параболы равен p , высота сегмента — h .

21. Найдите составляющие силы притяжения однородного полушария с плотностью σ радиуса R точки единичной массы, лежащей на его краю: а) в направлении на центр его основания, б) перпендикулярно этому направлению в плоскости основания, в) перпендикулярно этим двум направлениям.

22. Найдите отклонение отвеса, вызванное полусферическим холмом радиуса R_1 , имеющим плотность σ_1 . Землю считать шаром радиуса R со средней плотностью σ .

23. Однородный шар притягивает точку, лежащую на его поверхности с силой F , а однородный равновеликий цилиндр той же плотности притягивает точку, расположенную в центре одного из его оснований, с силой F' . Показать:

1) отношение F/F' есть функция отношения α высоты цилиндра h к радиусу его основания R ;

2) отношение F/F' стремится к нулю, когда высота цилиндра либо стремится к нулю, либо к бесконечности;

3) отношение F/F' имеет только один максимум;

4) сила притяжения цилиндра в условиях максимума приближенно равна силе притяжения шара;

5) существует два цилиндра, для которых сила притяжения F' равна силе притяжения шара F .

24. Найдите силовую функцию для точки, лежащей вне притягивающего тела, если сила тяготения изменяется обратно пропорционально n -й степени расстояния. При каком значении n силовая функция конечна и определена в точках, принадлежащих притягиваемому телу?

25. Найдите положение и форму, которую нужно придать однородной массе заданного объема V и плотности σ , для того, чтобы силовая функция тяготения приняла максимальное значение в данной точке пространства.

26. Дана однородная масса плотности σ и объема V . Найдите расположение и форму, которую нужно придать этой массе, чтобы ее притяжение в заданной точке пространства было максимальным (*задача Бертрана*).

27. Вычислите энергию однородного гравитирующего шара радиуса R и плотности σ .

§ 2. Уравнение Лапласа. Разложение потенциала тяготения в ряд по сферическим функциям

Справочные сведения

Теорема Дирихле. Потенциал ньютоновского тяготения тела во всем внешнем пространстве удовлетворяет *уравнению Лапласа*. В декартовой прямоугольной системе координат оно записывается следующим образом:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Во внутренних точках тела потенциал удовлетворяет *уравнению Пуассона*

$$\Delta U = -4\pi f\sigma(x, y, z), \quad (2)$$

где σ — плотность тела.

Имеет место

Теорема Дирихле. Если плотность σ обладает внутри тела непрерывными частными производными первого порядка, то регулярная на бесконечности функция $U(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta U = \begin{cases} -4\pi f\sigma & \text{внутри тела,} \\ 0 & \text{вне тела,} \end{cases}$$

совпадает с потенциалом тяготения тела.

Из требования регулярности функции на бесконечности вытекает условие

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} rU = fm, \quad (3)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а m — масса тела.

Уравнение Лапласа в криволинейных координатах. Если вместо прямоугольных координат ввести ортогональные криволинейные координаты при помощи соотношений

$$x = x(q_1, q_2, q_3),$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3),$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3),$$

то уравнение Лапласа примет вид

$$\Delta U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right\} = 0, \quad (4)$$

где H_i — коэффициенты Ламе, определяемые формулами

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (5)$$

Так, например, в сферических координатах уравнение Лапласа принимает форму

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (6)$$

Сферические функции. Полиномы Лежандра. *Общей сферической функцией n -го порядка* называется функция

$$Y_n(\varphi, \lambda) = \sum_{k=0}^n P_n^k(\sin \varphi) (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda), \quad (7)$$

где n, k — натуральные числа, A_{nk} и B_{nk} — постоянные величины, φ, λ — сферические координаты, а P_n^k — *присоединенная функция Лежандра порядка n и ранга k (первого рода)*.

Присоединенные функции Лежандра определяются через *полиномы Лежандра*

$$P_n^k(x) = (1-x^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}. \quad (8)$$

Здесь $P_n(x)$ — полином Лежандра n -го порядка. Полиномы Лежандра можно ввести с помощью *формулы Родрига*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}. \quad (9)$$

Полиномы Лежандра можно вычислять также с помощью *производящей функции*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2}}. \quad (10)$$

Они равны коэффициентам в разложении этой функции в ряд Маклорена по степеням α .

Для теории потенциала основным свойством является *ортогональность присоединенных функций Лежандра*. Это свойство выражается формулой

$$\int_{-1}^{+1} P_n^k(x) P_m^k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \frac{2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!} & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (11)$$

Сферические гармоники делятся на три категории. Гармоники, соответствующие $k=0$, называются *зональными*. При $k=n$ сферические гармоники называются *секториальными*. Наконец, в промежуточном случае, при $0 < k < n$, сферические гармоники называются *тессеральными*.

При разложении потенциала тяготения в ряд обычно используются так называемые *элементарные сферические гармоники*:

$$\frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^k} \cos^k \varphi \cos k\lambda, \quad \frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^k} \cos^k \varphi \sin k\lambda.$$

В силу ортогональности полиномов Лежандра и присоединенных функций Лежандра элементарные сферические гармоники также представляют собой ортогональную систему функций.

Любая непрерывная и однозначная на сфере единичного радиуса функция $f(\varphi, \lambda)$ может быть разложена в ряд по сферическим функциям

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_n^k(\sin \varphi) (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda), \quad (12)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} A_{nk} &= \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi \delta_k (n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda) P_n^k(\sin \varphi) \cos k\lambda \cos \varphi d\varphi d\lambda, \\ B_{nk} &= \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi \delta_k (n+k)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varphi, \lambda) P_n^k(\sin \varphi) \sin k\lambda \cos \varphi d\varphi d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $\delta_0=2$, $\delta_1=\delta_2=\dots=1$. Отдельные члены этого ряда также называются гармониками.

Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям. Разложение потенциала тяготения записывается следующим образом:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^k(\sin \varphi) (C_{nk} \cos k\lambda + D_{nk} \sin k\lambda), \quad (14)$$

а его коэффициенты даются формулами

$$\left. \begin{aligned} C_{nk} &= \frac{2f(n-k)!}{\delta_k(n+k)!} \int P_n^k(\sin \varphi') \sigma r'^n \sin k\lambda' d\tau, \\ D_{nk} &= \frac{2f(n-k)!}{\delta_k(n+k)!} \int P_n^k(\sin \varphi') \sigma r'^n \sin k\lambda' d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где r' , φ' , λ' — текущие координаты, а интегрирование распространено по объему тела.

Если ограничиться несколькими первыми членами разложения, то будем иметь

$$U = \frac{fm}{r} \left[1 + \frac{1}{r^2} (xx_c + yy_c + zz_c) \right] + \frac{f}{r^3} [(B+C-2A)x^2 + (A+C-2B)y^2 + (A+B-2C)z^2] + \dots, \quad (16)$$

где m — масса тела, x_c , y_c , z_c — координаты его центра инерции, а A , B , C — главные моменты инерции относительно осей, проходящих через начало координат.

Приведенное разложение сходится во всех внешних по отношению к телу точках.

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [3], дополнительная — [4] — [8].

ЗАДАЧИ

1. С помощью формулы Родрига найдите полиномы Лежандра нулевого, первого, второго и третьего порядков.

2. Используя формулу Родрига, покажите, что

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0 \quad (n \neq 0).$$

3. Предполагая, что Земля есть шар со сферическим распределением плотности, Лаплас вывел следующий закон распределения плотности:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\sin \mu \rho}{\rho \sin \mu},$$

где σ_0 — поверхностная плотность, μ — постоянная, зависящая от массы Земли, $\rho = r/R$, причем r — геоцентрический радиус-вектор, а R — радиус Земли. Найдите массу Земли m и ее момент инерции I относительно диаметра.

4. Докажите, что если функция $F(x, y, z)$ представляет собой решение уравнения Лапласа, то и функция $\frac{1}{r}F\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, также является решением этого уравнения (*задача Гомпсона*).

5. Покажите, что функция

$$U = \frac{l}{\sqrt{(x-a-i\alpha)^2 + (y-b-i\beta)^2 + (z-c-i\gamma)^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{(x-a+i\alpha)^2 + (y-b+i\beta)^2 + (z-c+i\gamma)^2}},$$

где $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ — действительные, а l, λ — комплексные числа, является однозначной гармонической функцией, а окружность

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \\ \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) &= 0, \end{aligned}$$

представляет собой особую кривую этой функции. Покажите также, что при надлежащем выборе значений l и λ функция U является ньютоновским потенциалом некоторого тела.

6. Исходя из уравнения Лапласа, определите силовую функцию ньютоновского тяготения однородного сферического слоя плотности σ , внешний и внутренний радиусы которого соответственно равны ρ и R .

7. Найдите закон распределения плотности, при котором притяжение шара на точку его поверхности не зависит от размеров шара.

8. Преобразуйте уравнение Лапласа к сжатым сфероидальным координатам u, v, w , связанным с прямоугольными координатами формулами преобразования

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} u \sin v \cos w, \\ y &= c \operatorname{ch} u \sin v \sin w, \\ z &= c \operatorname{sh} u \cos v, \end{aligned}$$

где c — постоянная величина.

9. Преобразуйте уравнение Лапласа к вытянутым сфероидальным координатам u, v, w , связанным с прямоугольными координатами формулами преобразования

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{sh} u \sin v \cos w, \\ y &= c \operatorname{sh} u \sin v \sin w, \\ z &= c \operatorname{ch} u \cos v, \end{aligned}$$

где c — постоянная величина.

10. Разложите в ряд по полиномам Лежандра силовую функцию притяжения неоднородного прямолинейного отрезка длины $2l$. Оцените область сходимости разложения для однородного стержня.

11. Разложите в ряд по полиномам Лежандра силовую функцию притяжения однородной окружности плотности σ и радиуса R .

12. Разложите в ряд по полиномам Лежандра силовую функцию тяготения однородного круглого диска плотности σ и радиуса R .

13. Силовая функция сфероидальной планеты с точностью до величины порядка квадрата сжатия планеты представляется в виде

$$U = \frac{fm}{c} \frac{\text{sh } v - \sigma \cos u}{\text{sh}^2 v + \cos^2 u},$$

где m — масса планеты, c — расстояние шаровой точки инерции от центра масс, σ — коэффициент асимметрии планеты относительно экваториальной плоскости, а u и v — сжатые сфероидальные координаты, связанные с экваториальными планетоцентрическими прямоугольными координатами формулами преобразования

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} v \sin u \cos \omega, \\ y &= c \operatorname{ch} v \sin u \sin \omega, \\ z &= c\sigma + c \operatorname{sh} v \cos u. \end{aligned}$$

Покажите, что U представляет собой силовую функцию двух неподвижных притягивающих центров.

14. Покажите, что гравитационное поле слабо сжатой планеты представляет собой наложение гравитационных полей точечной массы и совпадающего с ней диполя.

§ 3. Притяжение эллипсоидальных тел

Справочные сведения

Притяжение однородного трехосного эллипсоида. Однородное притягивающее тело с плотностью σ ограничено эллипсоидальной поверхностью с полуосями a , b , c ($a \geq b \geq c$). Возьмем прямоугольную систему координат с началом в центре эллипсоида, направив оси координат по главным осям эллипсоида. Тогда потенциал тяготения эллипсоида в точке $P(x, y, z)$ выразится с помощью формулы

$$U(x, y, z) = -2\pi fabc\sigma \int_{\lambda}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} \right] \frac{ds}{R(s)}, \quad (1)$$

а составляющие силы притяжения по координатным осям равны

$$\left. \begin{aligned} F_x = U'_x &= -2\pi fabc\sigma x \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)R(s)}, \\ F_y = U'_y &= -2\pi fabc\sigma y \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(b^2+s)R(s)}, \\ F_z = U'_z &= -2\pi fabc\sigma z \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2+s)R(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В формулах (1)—(2) $\lambda=0$, если точка P внутренняя по отношению к притягивающему телу, и λ представляет собой положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \quad (3)$$

если P — внешняя точка, а через $R(s)$ обозначена величина

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}. \quad (4)$$

Притяжение однородного эллипсоида вращения. Для характеристики сжатия эллипсоидов введем *вторые эксцентриситеты* *)

$$l = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}, \quad l_1 = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c}. \quad (5)$$

При $l=l_1$ тело представляет собой сжатый эллипсоид вращения, а при $l \neq 0$, $l_1=0$ — вытянутый эллипсоид вращения.

В случае однородного сжатого эллипсоида вращения потенциал тяготения и компоненты силы равны

$$U = \frac{3fm}{2lc} \left\{ \arctg lu + \frac{x^2+y^2}{l^2c^2} \left(\frac{lu}{1+l^2u^2} - \arctg lu \right) + \frac{z^2}{l^2c^2} \left(\arctg lu - lu \right) \right\}, \quad (6)$$

$$\frac{F_x}{x} = \frac{F_y}{y} = \frac{3fm}{l^3c^3} \left(\frac{lu}{1+l^2u^2} - \arctg lu \right), \quad (7)$$

$$\frac{F_z}{z} = \frac{3fm}{l^3c^3} (\arctg lu - lu). \quad (8)$$

Здесь для внешней точки в качестве u следует принять положительный корень уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{1+l^2u^2} + z^2 = \frac{c^2}{u^2}, \quad (9)$$

а m — масса эллипсоида.

Если в формулах (6)—(8) положить $u=1$, то получим выражения для силовой функции и компонент силы притяжения во внутренней точке эллипсоида или на его поверхности.

В случае однородного вытянутого эллипсоида ($l_1=0$, $l \neq 0$) силовая функция и компоненты силы притяжения равны

$$U = \frac{3fm}{2lc} \left\{ \ln(\sqrt{1+l^2u^2} + lu) + \frac{x^2}{l^2c^2} \left[\frac{lu}{\sqrt{1+l^2u^2}} - \ln(\sqrt{1+l^2u^2} + lu) \right] + \frac{y^2+z^2}{l^2c^2} \left[\ln(\sqrt{1+l^2u^2} + lu) - \ln \sqrt{1+l^2u^2} \right] \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{F_x}{x} = \frac{3fm}{l^3c^3} \left[\frac{lu}{\sqrt{1+l^2u^2}} - \ln(\sqrt{1+l^2u^2} + lu) \right], \quad (11)$$

$$\frac{F_y}{y} = \frac{F_z}{z} = \frac{3fm}{l^3c^3} \left[\ln(\sqrt{1+l^2u^2} + lu) - \ln \sqrt{1+l^2u^2} \right], \quad (12)$$

*) Используются также первое и второе сжатия (см. § 1 гл. I).

причем для внешней точки здесь вместо u следует подставить положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{1+l^2u^2} + y^2 + z^2 = \frac{c^2}{u^2}. \quad (13)$$

При $u = 1$ формулы (10) — (11) соответствуют случаю, когда точка находится внутри или на поверхности эллипсоида.

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [3], дополнительная — [6], [7].

ЗАДАЧИ

1. Найдите потенциал тяготения тонкого однородного эллипсоидального слоя, заключенного между двумя подобными концентрическими эллипсоидами, на внутреннюю точку.

2. Вычислите энергию однородного гравитирующего эллипсоида с полуосями a , b , c и с плотностью σ .

3. Докажите, что сила притяжения однородным сжатым эллипсоидом вращения внешней точки, лежащей в его экваториальной плоскости на некотором расстоянии от центра, превосходит силу притяжения шара равной с эллипсоидом массы точки, отстоящей от центра шара на таком же расстоянии, как и первая точка.

4. Докажите, что сила притяжения однородным сжатым эллипсоидом вращения внешней точки, лежащей на его оси симметрии на некотором расстоянии от центра, меньше силы притяжения шара равной с ним массы точки, отстоящей от центра шара на таком же расстоянии, как и первая точка.

5. Покажите, что однородный эллипсоид вращения с весьма малым сжатием (квадратом которого можно пренебречь) притягивает точку, лежащую на его поверхности на широте $35^\circ 15' 52''$, с такой же силой, как и точка равной с эллипсоидом массы, расположенная в центре эллипсоида.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.
2. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968.
3. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 3, Гостехиздат, 1949.

Дополнительная

4. Абадакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», 1971.
5. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения, «Наука», 1968.
6. Мультион Ф. Р., Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935.
7. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.
8. Эскобал П., Методы определения орбит, пер. с англ., «Мир», 1970.

ГЛАВА III

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

§ 1. Первые интегралы задачи. Уравнение орбиты

Справочные сведения

Дифференциальные уравнения движения. Задача двух тел состоит в изучении абсолютного движения двух материальных точек, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона. Однако на практике часто достаточно ограничиться анализом движения одной из притягивающихся точек относительно системы координат с началом во второй материальной точке и с неизменно направленными в абсолютном пространстве осями координат, т. е. достаточно изучить относительное движение первой точки.

Обозначим через m_0 и m массы притягивающихся точек и будем изучать движение точки с массой m в системе координат с началом в точке с массой m_0 (в дальнейшем для удобства точку с массой m_0 будем называть *притягивающим центром*, или *центральной телом*). Положение первой материальной точки будем задавать радиусом-вектором r (рис. 3.1). Относительное движение точки с массой m описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{K r}{r^3} = 0, \quad (1)$$

в котором $K = f(m_0 + m)$, а через f обозначена постоянная тяготения. Векторному уравнению (1) соответствует система трех скалярных дифференциальных уравнений.

Наряду со сформулированной задачей двух тел часто рассматривают *ограниченную задачу двух тел*, иначе говоря, задачу о движении материальной точки в центральном ньютоновском поле тяготения. Она сводится к исследованию движения материальной точки в поле ньютоновского тяготения неподвижного центра. К такой математической модели мы приходим в том случае, когда масса m ничтожно мала по сравнению с массой m_0 *). Векторное дифференциальное уравнение движения в ограниченной задаче двух тел имеет вид (1),

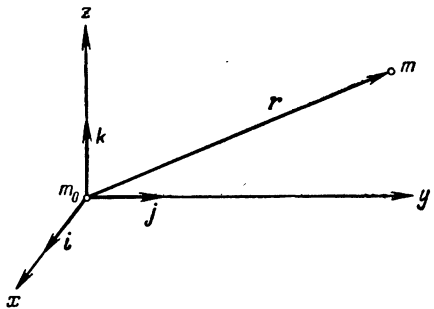


Рис. 3.1.

*) Точку с ничтожно малой массой (по сравнению с m_0) называют *пассивной гравитирующей*, ибо можно пренебречь ускорением, сообщаемым ею другому телу.

однако здесь K следует полагать равным гравитационному параметру притягивающего центра fm_0 (см. гл. II).

Первые интегралы. Векторное дифференциальное уравнение (1) допускает следующие первые интегралы:

а) *интеграл энергии* или *интеграл живых сил*

$$V^2 = \frac{2K}{r} + h, \quad (2)$$

в котором $V = |\mathbf{V}| = |\dot{\mathbf{r}}|$, а h называется *константой энергии* или *постоянной живых сил*;

б) *векторный интеграл площадей*

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\sigma}, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — *векторная константа площадей* или *постоянная площадей*;

в) *векторный интеграл Лапласа*

$$\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V} + \frac{K\mathbf{r}}{r} = -\boldsymbol{\lambda}, \quad (4)$$

в котором векторная постоянная $\boldsymbol{\lambda}$ называется *вектором Лапласа*.

Первые интегралы (2)–(4) связаны между собой следующими соотношениями:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (5)$$

$$\lambda^2 = K^2 + h\sigma^2. \quad (6)$$

Из интеграла площадей следует, что орбита относительного движения точки с массой m представляет собой плоскую кривую, лежащую в плоскости, проходящей через притягивающий центр и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\sigma}$.

Если плоскость орбиты принята в качестве основной координатной плоскости $z=0$, то интеграл площадей принимает вид

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \sigma. \quad (7)$$

(Для удобства будем далее полагать, что $\sigma > 0$, т. е. направление оси аппликат совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{\sigma}$.)

Вводя в плоскости орбиты полярный угол φ , который будем отсчитывать от оси абсцисс, интеграл площадей можно переписать следующим образом:

$$r^2\dot{\varphi} = \sigma. \quad (8)$$

Соотношение (8) дает математическую формулировку *второго закона Кеплера*: секторная скорость материальной точки есть величина постоянная *).

Уравнение орбиты. Из векторного интеграла Лапласа и векторного интеграла площадей следует *первый закон Кеплера*, согласно которому движение одной из притягивающихся материальных точек относительно системы координат, связанной с другой материальной точкой (притягивающим центром), будет происходить по коническому сечению, один из фокусов которого будет находиться в притягивающем центре **).

Если в плоскости орбиты ввести полярные координаты с полюсом в притягивающем центре, а за полярную ось принять направление на ближайшую

*) Отсюда вытекает и классическая формулировка второго закона Кеплера.

**) Случай прямолинейного движения, имеющий место при $\sigma=0$, здесь и далее из рассмотрения исключается.

к нему точку орбиты, то уравнение орбиты точки с массой m будет иметь вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad (9)$$

Уравнение (9) дает математическое содержание первого закона Кеплера.

Направление полярной оси будет определяться вектором Лапласа λ , а саму эту ось будем называть *линией асид*. Ближайшая к фокусу точка Π орбиты называется *перигентром* (рис. 3.2). Полярный угол ν , входящий в формулу (9), отсчитывается от линии асид и называется *истинной аномалией*. Постоянные e и p соответственно обозначают *эксцентриситет* и *фокальный параметр* орбиты.

Орбиты задачи двух тел называются *кеплеровскими*. Кеплеровская орбита будет *эллиптической* при $0 \leq e < 1$ (в частности, при $e=0$ она будет окружностью), *параболической* при $e=1$, *гиперболической* при $e > 1$. Величины e и p выражаются через постоянные первых интегралов следующим образом:

$$e = \frac{\lambda}{K}, \quad (10)$$

$$p = \frac{\sigma^2}{K}. \quad (11)$$

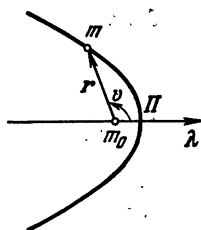


Рис. 3.2.

Если орбита — эллипс, то на ней будет иметься точка, наиболее удаленная от фокуса, занятого притягивающим центром (см. точку A на рис. 3.3). Эта точка называется *апоцентром* *). Значения величины радиуса-вектора в перигентре r_{Π} и апоцентре r_a можно вычислить по формулам

$$r_a = \frac{p}{1 - e}, \quad r_{\Pi} = \frac{p}{1 + e}. \quad (12)$$

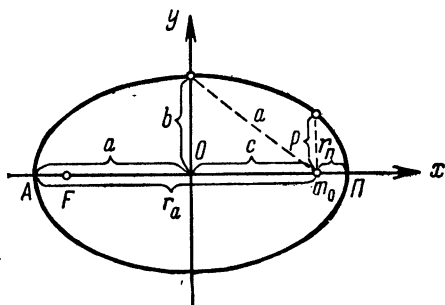


Рис. 3.3.

Пусть a_3, b_3, c_3 — соответственно большая полуось эллипса, его малая полуось и половина расстояния между фокусами. Пусть, далее, $a_{\Gamma}, b_{\Gamma}, c_{\Gamma}$ — действительная полуось, мнимая полуось и половина расстояния между фокусами гиперболы.

Ради единого вида формул для обоих типов движения введем величины a, b, c следующим образом:

$$a = a_3, \quad b = b_3, \quad c = c_3, \quad \text{если орбита — эллипс,}$$

$$a = -a_{\Gamma}, \quad b = -ib_{\Gamma}, \quad c = -c_{\Gamma}, \quad \text{если орбита — гипербола.}$$

Величину a будем называть *большой полуосью* конического сечения. Она будет положительной для эллипса и отрицательной для гиперболы.

*) Перигентр и апоцентр называют также *асидами* орбиты. В зависимости от того, какое из тел находится в фокусе орбиты, вместо слов «перигентр» и «апоцентр» употребляют соответственно термины: *перигей* и *апогей*, если центральным телом (притягивающим центром) является Земля; *перигелий* и *афелий*, если центральное тело — Солнце; *периселений* и *апоселений*, если центральное тело — Луна; *периастр* и *апоастр*, если центральное тело — звезда, и т. п.

Следующие формулы справедливы для обоих типов орбит:

$$e = \frac{c}{a}, \quad (13)$$

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad (14)$$

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad (15)$$

$$r_{\Pi} = a(1 - e). \quad (16)$$

Л и т е р а т у р а : основная — [1] — [5], дополнительная — [6] — [9].

ЗАДАЧИ

1. Вторая советская космическая ракета, попавшая на поверхность Луны 4 сентября 1959 г., на геоцентрическом расстоянии 320 000 км имела скорость 2,31 км/сек. Какую скорость имела она на расстоянии 230 км от поверхности Земли?

2. Среднее расстояние Нептуна от Солнца составляет 30,1 а. е., а среднее расстояние Плутона от Солнца почти на 10 а. е. больше и равно 39,5 а. е. Эксцентриситеты орбит Нептуна и Плутона соответственно равны $e_{\text{Н}} = 0,009$ и $e_{\text{П}} = 0,25$. Какая из этих двух планет ближе подходит к Солнцу — Нептун или Плутон?

3. Большая полуось орбиты Земли (в ее движении вокруг Солнца) равна $149,6 \cdot 10^6$ км, эксцентриситет орбиты составляет $1/60$ (точнее, 0,01679). Вычислите наименьшее и наибольшее гелиоцентрические расстояния Земли.

4. Над каким полушарием больше времени находился первый искусственный спутник Земли в течение первых его оборотов вокруг Земли — над северным или южным? Воспользуйтесь тем, что перигей спутниковой орбиты находился над некоторой точкой северного полушария.

5. С поверхности планеты вертикально вверх должна быть запущена высотная ракета-зонд. Планету можно считать шаром радиуса R со сферическим распределением плотности. Сопротивлением ее атмосферы можно пренебречь. Ускорение силы тяжести на поверхности равно g . Какую начальную скорость V_0 у поверхности планеты необходимо сообщить ракете, чтобы она поднялась на высоту H над поверхностью планеты? Получите приближенные формулы для вычисления V_0 в случаях, когда

а) H мало и можно пренебречь величиной H/R ;

б) H велико и можно пренебречь величиной R/H .

6. Космический аппарат движется в центральном ньютоновском поле по гиперболической орбите. Угол между асимптотами орбиты равен $\alpha = 60^\circ$. Каков эксцентриситет орбиты?

7. Известно, что среднее арифметическое наименьшего и наибольшего расстояний тела, движущегося по эллиптической орбите, от притягивающего центра равно большей полуоси его орбиты. Покажите,

что среднее геометрическое этих же расстояний равно малой полуоси орбиты, а их среднее гармоническое — фокальному параметру орбиты.

8. Запишите в координатной форме векторный интеграл Лапласа в задаче двух тел.

9. Вычислите большую полуось кеплеровской орбиты, если

а) известны гравитационный параметр притягивающего центра, эксцентриситет орбиты и постоянная площадей;

б) известны гравитационный параметр и постоянная живых сил.

§ 2. Скорость кеплеровского движения

Справочные сведения

Общие формулы для модуля скорости и ее компонент. *Модуль скорости* материальной точки, движущейся по кеплеровской орбите, определяется формулой

$$V = \sqrt{\frac{K}{p} (1 + 2e \cos v + e^2)}. \quad (1)$$

Радиальная V_r и *трансверсальная* (поперечная) V_p компоненты скорости соответственно равны

$$V_r = \sqrt{\frac{K}{p}} e \sin v, \quad (2)$$

$$V_p = \sqrt{\frac{K}{p}} (1 + e \cos v). \quad (3)$$

Если угол между вектором скорости V движущейся точки и ее радиусом-вектором r равен β , то

$$rV \sin \beta = \sigma, \quad (4)$$

где σ — постоянная площадей.

Нередко бывает удобно при определении скорости пользоваться интегралом живых сил, записанном в виде

$$V^2 = K \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (5)$$

Круговая и параболическая скорости. *Параболическая скорость* $V_{\text{пар}}$ есть минимальная скорость, которую следует сообщить материальной точке, находящейся в данной точке пространства, чтобы она могла удалиться на любое сколь угодно большое расстояние от притягивающего центра.

Круговая скорость $V_{\text{кр}}$ — это та скорость в данной точке пространства, которую следует сообщить материальной точке, чтобы она стала обращаться вокруг притягивающего центра по круговой орбите.

Справедливы формулы

$$V_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2K}{r}}, \quad (6)$$

$$V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{K}{r}}, \quad (7)$$

$$V_{\text{пар}} = \sqrt{2} V_{\text{кр}}, \quad (8)$$

в которых через r обозначено расстояние движущейся точки от притягивающего центра.

Пусть притягивающее центральное тело представляет собой шар со сферическим распределением плотности. Для этого тела можно ввести понятие *первой* и *второй космической скорости*. Под первой космической скоростью V_I понимают круговую скорость у поверхности притягивающего тела. Под второй космической скоростью V_{II} понимают параболическую скорость у поверхности этого тела.

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [5], дополнительная — [6], [8].

ЗАДАЧИ

1. Космическое тело находится на гелиоцентрическом расстоянии $149,6 \cdot 10^6$ км. Вычислить круговую и параболическую скорости относительно Солнца на указанном расстоянии.

2. Какую скорость должен получить искусственный спутник Земли, обращающийся по круговой орбите в плоскости земного экватора, чтобы он во все время движения находился над одной и той же точкой земной поверхности? На какой высоте должен быть запущен такой «стационарный» спутник? Рассуждения провести в предположении шаровой модели Земли.

3. Советская космическая ракета, запущенная 12 сентября 1960 г. и попавшая на поверхность Луны, на геоцентрическом расстоянии 320 000 км имела геоцентрическую скорость около 2,31 км/сек. Считая, что движение ракеты происходило по коническому сечению (от конца активного участка до момента удаления на расстояние в 320 000 км), определите, была ли траектория ракеты эллиптической, гиперболической или параболической?

4. Материальная точка M_1 движется вокруг притягивающего центра A по эллипсу с большой полуосью a и приходит в точку Q со скоростью V_1 . Другая материальная точка M_2 , в начальный момент покоившаяся в точке Q_1 , лежащей на луче AQ на расстоянии $2a$ от притягивающего центра, падает на притягивающий центр. Покажите, что в точку Q материальная точка M_2 придет с такой же по величине скоростью, что и точка M_1 .

5. Спутник притягивающего центра находится в точке орбиты с истинной аномалией ν . Известна, кроме того, круговая скорость $V_{кр}$ в этой точке и эксцентриситет орбиты e . Какую скорость имеет спутник в рассматриваемый момент?

6. Геоцентрическую орбиту Луны в первом приближении можно считать окружностью радиуса $R = 384\,400$ км $\approx 60R_3$, где R_3 — радиус Земли. Найдите значения круговой и параболической скоростей для точек указанной орбиты.

7. Вычислите первую и вторую космические скорости у поверхности Луны. Средний радиус Луны считать равным $R_L = 1738$ км, а массу Луны — в 81,3 раза меньше массы Земли.

8. Вычислите модуль скорости и период обращения кругового спутника, движущегося на геоцентрическом расстоянии 6600 км.

9. Астероид представляет собой шар радиуса 80 км с сферическим распределением плотности и имеет такую же среднюю плотность, как и Земля. С астероида вертикально вверх брошен камень со скоростью 150 м/сек. Упадет ли камень обратно на астероид?

10. На поверхности Солнца сила тяжести в 28 раз больше, чем на поверхности Земли. Вследствие взрыва образовался протуберанец высотой 100 000 км. Считая, что вещество, образовавшее верхний слой протуберанца, не испытывало сопротивления других слоев солнечной атмосферы, вычислите, какой должна была оказаться скорость этого вещества у поверхности Солнца.

11. Космический аппарат движется с выключенными двигателями в центральном поле тяготения Луны. Большая полуось его орбиты $a = -2R_{\text{л}}$, где $R_{\text{л}}$ — средний радиус Луны. Какой будет величина скорости аппарата относительно Луны в тот момент, когда его селеноцентрическое расстояние будет равно $4R_{\text{л}}$?

12. Пользуясь интегралом площадей, докажите «правило рычага»

$$r_a V_a = r_n V_n$$

где r_n и r_a — соответственно расстояния перицентра и апоцентра от притягивающего центра, а V_n и V_a — скорости прохождения через перицентр и апоцентр.

13. Если космическая ракета на высоте 230 км над земной поверхностью получит в направлении, перпендикулярном ее геоцентрическому радиусу-вектору, скорость 10 км/сек, то апогей орбиты ракеты окажется примерно на геоцентрическом расстоянии 370 000 км. Какую скорость будет иметь ракета в апогее?

14. Космический аппарат движется по кеплеровской орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом e . Какой угол β образует вектор его скорости с его радиусом-вектором в тот момент, когда аппарат отстоит от притягивающего центра на расстоянии r ?

15. Космический корабль совершает перелет с выключенным двигателем в межпланетном пространстве. Рас-

стояния от планет таковы, что их притяжением можно пренебречь и учитывать только силу солнечного тяготения. В начальный момент времени t_0 , когда корабль находился в точке P_0 на гелиоцентрическом расстоянии r_0 , он имел гелиоцентрическую скорость V_0 , причем угол между вектором скорости корабля и его радиусом-вектором в этот

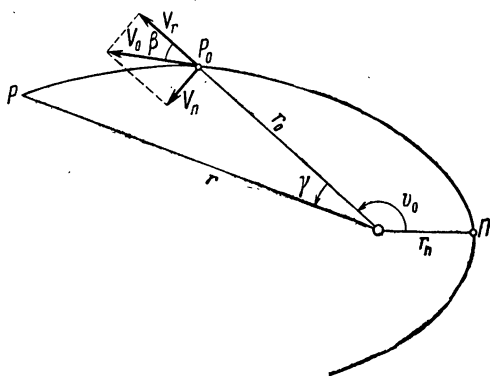


Рис. 3.4.

момент был равен β (рис. 3.4). Найдите истинную аномалию ϑ_0 корабля в начальный момент времени t_0 , его гелиоцентрическое расстояние r_n в момент прохождения через перигелий, эксцентриситет e и фокальный параметр p орбиты корабля.

16. Космический корабль, о котором говорилось в предыдущей задаче, через некоторое время пришел в точку P , находящуюся на гелиоцентрическом расстоянии r (рис. 3.4). За время перелета от P_0 до P гелиоцентрический радиус-вектор корабля повернулся на угол γ , причем $0 < \gamma < \pi$. Найдите формулу для вычисления γ .

17. Спутник вышел на орбиту на расстоянии r_0 от притягивающего центра и имел в этот момент скорость, по модулю равную V_0 . Вектор скорости спутника в указанный момент составлял с радиусом-вектором угол β_0 . Через некоторое время этот угол стал равен β . Какую скорость V имел в этот момент спутник? На каком расстоянии r от притягивающего центра он находился?

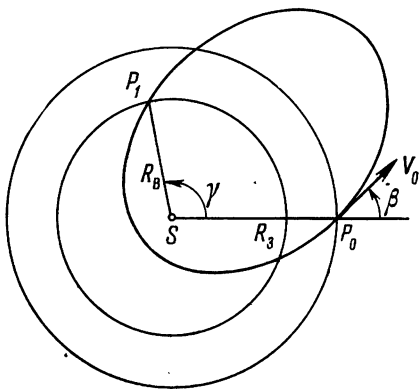


Рис. 3.5.

18. Космический аппарат находился в точке P_0 на орбите Земли. Он должен совершить перелет к орбите Венеры и пройти через заданную точку P_1 на ее орбите. Угол между гелиоцентрическими направлениями на точки P_0 и P_1 равен γ . Примерный вид орбиты перелета аппарата указан на рис. 3.5. Каким должен быть угол β между радиусом-вектором аппарата с началом в Солнце S и вектором его скорости V_0 в точке P_0 , если перелет должен быть совершен при минимально возмож-

ном значении скорости V_0 ? Вычислите эту минимальную скорость. Тяготением к Земле и Венере можно пренебречь. Гелиоцентрические радиусы-векторы точек P_0 и P_1 известны и соответственно равны R_3 и R_B .

19. Решите предыдущую задачу в предположении, что $\gamma = 120^\circ$, $R_3 = 148 \cdot 10^6$ км, $R_B = 108 \cdot 10^6$ км.

20. Зная скорость V_n искусственного спутника Земли в перигее и его перигейное расстояние r_n , вычислите апогейное расстояние спутника r_a и апогейную скорость V_a .

21. Найдите наименьшую и наибольшую скорости гелиоцентрического кеплеровского движения Земли. Сравните найденные значения со средней скоростью движения Земли вокруг Солнца, т. е. с той скоростью, которую имела бы Земля, если бы она двигалась вокруг Солнца по окружности с радиусом, равным среднему расстоянию от Земли до Солнца. Эксцентриситет земной орбиты принять равным $1/60$, а среднее расстояние Земли от Солнца — $149,6 \cdot 10^6$ км.

22. Какую минимальную начальную скорость необходимо сообщить космическому аппарату, находящемуся на высоте 230 км над поверхностью Земли, в направлении, перпендикулярном геоцентрическому радиусу-вектору, для того, чтобы аппарат мог попасть в Луну в ее апогее? Притяжением Луны можно пренебречь.

Решите эту задачу для случая попадания в Луну в ее перигее. Среднее расстояние Луны от Земли принять равным $a = 384\,400$ км, а эксцентриситет лунной орбиты $e = 1/18$.

23. Докажите, что при прохождении спутника через конец малой оси эллиптической кеплеровской орбиты скорость спутника по абсолютной величине равна местной круговой скорости.

24. Для того чтобы спутник планеты мог длительное время обращаться вокруг нее, он не должен приближаться к ее поверхности ближе, чем на расстояние h (в противном случае он быстро сгорит в ее атмосфере). Спутник выходит на эллиптическую орбиту на высоте H над поверхностью планеты со скоростью, перпендикулярной его планетоцентрическому радиусу-вектору. В каких пределах должна находиться величина начальной скорости, чтобы спутник мог длительное время обращаться вокруг планеты, т. е. чтобы выполнялось неравенство $r_n \geq h$?

25. Космическая ракета, движущаяся относительно звезды по гиперболической кеплеровской орбите, приближается к звезде с весьма большого расстояния (из «бесконечности»). На больших расстояниях от звезды («на бесконечности») она движется практически прямолинейно — по асимптоте к своей орбите, которая отстоит от звезды на известном расстоянии d , и имеет скорость V_1 , причем $|V_1| = V_\infty$. После прохождения через периастр ракета будет неограниченно удаляться от звезды и на достаточно больших расстояниях от нее («на бесконечности») она опять будет двигаться практически по прямой со скоростью V_2 , $|V_2| = V_\infty$. Вычислите угол λ между векторами скоростей V_1 и V_2 , т. е. угол, на который повернется вектор скорости ракеты в результате воздействия звезды. Гравитационный параметр K звезды известен.

26. Ракета запускается под углом β к местной вертикали на расстоянии R от центра Земли. Найдите минимальную начальную скорость V , которую следует сообщить ракете для того, чтобы она удалась от центра Земли на данное расстояние d . Выведите формулу для большой полуоси и эксцентриситета орбиты ракеты.

27. Ракета получила на высоте H над земной поверхностью некоторую начальную скорость V_0 , направленную под углом ψ к горизонту. Какова должна быть величина этой начальной скорости для того, чтобы перигейное расстояние ракеты было равно заданной величине?

28. Советская автоматическая межпланетная станция (АМС), посланная к Венере 12 февраля 1961 г. стартовала с борта космической ракеты. В момент отделения от ракеты скорость АМС превышала местную параболическую скорость на $d = 661$ м/сек. Кроме

того, известно, что АМС на расстоянии $r_0 = 488\,900$ км от поверхности Земли имела скорость $V_0 = 4,050$ км/сек. На какой высоте H над поверхностью Земли отделилась АМС от несшей ее космической ракеты? Какую скорость имела АМС в этот момент? Вычислите величину большой полуоси геоцентрической орбиты АМС. Была ли орбита АМС вблизи Земли эллиптической, гиперболической или параболической?

29. При прохождении через некоторую точку P , отстоящую от центра звезды на расстоянии r_0 , спутник звезды имел скорость V_0 . Местная параболическая скорость в точке P равна $V_{\text{пар}}$. Вычислите большую полуось орбиты спутника.

30. При прохождении через периастр спутник звезды имел скорость V_0 . Местная круговая скорость $V_{\text{кр}}$ в периастре известна. Вычислите эксцентриситет орбиты спутника.

31. Для одного момента времени известны радиальная V_r и тангенциальная V_p компоненты скорости космического аппарата, движущегося в поле тяготения неподвижного притягивающего центра. Известна также местная круговая скорость $V_{\text{кр}}$ в точке, где аппарат находился в указанный момент времени. Вычислите эксцентриситет орбиты.

32. Баллистическая ракета дальнего действия запускается с поверхности планеты, которую можно считать шаром радиуса R со сферическим распределением плотности. Соппротивлением атмосферы и временем, затраченным на активный участок полета, допустимо пренебречь. Известно, что в конце активного участка ракета имела скорость V_0 , причем угол наклона вектора скорости к горизонту был равен α . Первая космическая скорость $V_1 = V_{\text{кр}}$ для данной планеты известна. Вычислите эксцентриситет и большую полуось орбиты. Найдите, какой наибольшей высоты достигла ракета.

33. Космический аппарат был выведен на геоцентрическую орбиту, причем в момент выхода на орбиту он находился в ее перигее и имел скорость V_0 . В этой точке орбиты известна местная круговая скорость $V_{\text{кр}}$. Вычислите угол β между вектором скорости спутника и его геоцентрическим радиусом-вектором в тот момент, когда истинная аномалия спутника равна ψ .

34. Спутник P при прохождении через точку P_0 своей эллиптической орбиты отстоял от центра тяготения на расстоянии r_0 , а абсолютная величина его скорости в этот момент составляла V_0 . Известно, что если бы в этот момент скорость спутника была перпендикулярна его радиусу-вектору r_0 , то орбита спутника имела бы эксцентриситет e_0 . В действительности же вектор скорости спутника V_0 составлял с его радиусом-вектором угол α . Известна местная круговая скорость $V_{\text{кр}}$ в точке P_0 . Найдите эксцентриситет e орбиты спутника и расстояние r_n перицентра от притягивающего центра.

35. Спутник некоторого тела, гравитационный параметр которого равен K , в некоторой точке своей орбиты имел скорость V , на-

правленную под углом φ к его радиусу-вектору r (с началом в центре притягивающего тела). В этой точке орбиты спутника известна также местная круговая скорость $V_{кр}$. Какова была истинная аномалия спутника в момент прохождения через указанную точку, если известно, что $0 < v < \pi$?

36. Космический аппарат совершает перелет с орбиты Земли к орбите Марса и в некоторый момент времени находится в точке P на гелиоцентрическом расстоянии $150 \cdot 10^6$ км. Скорость аппарата относительно Солнца в этот момент равна $35,0$ км/сек и составляет с гелиоцентрическим радиусом-вектором аппарата угол в 60° . Пренебрегая притяжением к Земле, вычислите истинную аномалию космического аппарата в данном его положении.

37. Баллистическая ракета совершила перелет между двумя точками, лежащими на поверхности планеты. Известно, что в начальной точке ракете была сообщена минимально возможная скорость, обеспечивающая этот перелет. Кроме того, дано селеноцентрическое угловое расстояние 2α между начальной и конечной точками перелета.

Пренебрегая несферичностью планеты, сопротивлением ее атмосферы и вращением вокруг оси, укажите способ вычисления эксцентриситета орбиты перелета.

38. Баллистическая ракета в некоторой точке земной поверхности получила начальную скорость, по модулю равную V_0 ($V_0 < V_{кр}$). Угол наклона вектора скорости к горизонту был выбран так, что расстояние от точки старта до точки падения ракеты на поверхность Земли оказалось максимальным при заданном модуле скорости. Вычислите эксцентриситет орбиты, пренебрегая сопротивлением атмосферы, несферичностью и вращением Земли.

39. При запуске с северного полюса Земли ракета получила начальную скорость V_0 , по модулю равную первой космической скорости. Ракета приземлилась на экваторе. Под каким углом α к горизонту была запущена ракета? При решении задачи влиянием сжатия Земли и сопротивлением атмосферы пренебречь.

§ 3. Геометрические способы исследования задачи двух тел

Справочные сведения

При решении задач, связанных с рассмотрением кеплеровских орбит, нередко бывает удобно пользоваться геометрическими соображениями.

Весьма полезно следующее кинематическое свойство эллиптических орбит: Если точку, в которой в рассматриваемый момент времени находится движущаяся материальная точка, соединить прямыми с фокусами эллиптической орбиты, то одна из биссектрис образовавшихся при этом углов коллинеарна вектору скорости движущейся точки.

Если известна большая полуось a эллиптической орбиты, то иногда удобно воспользоваться вспомогательной окружностью Γ радиуса $2a$, описанной вокруг

притягивающего центра. Она представляет собой границу области возможного движения и называется *окружностью нулевой скорости* *).

Геометрическое построение кеплеровских орбит по существу состоит в построении линии апсид и определении положений фокусов. По этим данным не представляет труда указать любое из возможных положений движущейся точки на коническом сечении. В случае эллиптической орбиты задача при этом сводится к построению треугольника по основанию, сумме боковых сторон и углу при основании.

Л и т е р а т у р а: основная — [1], дополнительная — [6].

ЗАДАЧИ

1. На чертеже изображена эллиптическая орбита, по которой в центральном поле тяготения движется материальная точка. Кроме того, указано положение линии апсид AP и положение перицентра P . Как построить на чертеже положение притягивающего центра?

2. На чертеже изображена гиперболическая орбита точки, движущейся в центральном гравитационном поле, построены ее асимптоты и указано положение перицентра P . Как восстановить на чертеже положение притягивающего центра C ?

3. На чертеже изображена параболическая орбита, построенная для материальной точки, движущейся в центральном ньютоновском поле тяготения. Кроме того, построена ось апсид орбиты и указано положение перицентра. Восстановите положение притягивающего центра.

4. На чертеже указано положение притягивающего центра и положение спутника в некоторый момент времени. Известен также вектор скорости V_0 как по величине, так и по направлению (предполагается, что по модулю скорость менее местной параболической скорости). Каким образом по указанным данным можно построить орбиту?

5. Решите аналогичную задачу, если $V_0 > V_{\text{пар}}$.

6. На чертеже указаны положение притягивающего центра и положения P_1 и P_2 спутника для двух моментов времени. Известна, кроме того, абсолютная величина V_1 скорости спутника в положении P_1 , причем предполагается, что $V_1 < V_{\text{пар}}$. Требуется выбрать направление вектора скорости V_1 таким образом, чтобы спутник прошел через данную точку P_2 .

7. Решите аналогичную задачу, если $V_1 > V_{\text{пар}}$.

8. Указано положение притягивающего центра C и начальное положение P_1 материальной точки. Материальной точке в заданной пло-

*) В задаче о плоском движении материальной точки в консервативном силовом поле с силовой функцией U имеет место интеграл живых сил $\frac{mV^2}{2} = U + h$, в котором m — масса движущейся точки, V — ее скорость, а h — полная механическая энергия. Область возможного движения определяется неравенством $U + h \geq 0$. Граница этой области называется *кривой нулевой скорости* или *кривой Хилла*.

скости, проходящей через притягивающий центр и начальное положение P_1 , сообщается скорость V_0 ($V_0 < V_{\text{пар}}$). Покажите, что существует такая замкнутая линия, за пределы которой материальная точка не выйдет во все время движения, вне зависимости от направления вектора скорости V_0 . Что это за линия? Как обстоит дело, если $V_0 \geq V_{\text{пар}}$?

9. Привлекая геометрические соображения, выясните, может ли космический аппарат достигнуть орбиты Юпитера, если в начальный момент аппарат находился в некоторой точке орбиты Земли и имел гелиоцентрическую скорость 50 км/сек . Орбиты Земли и Юпитера считать круговыми и соответственно имеющими радиусы 1 а. е. и $5,2 \text{ а. е.}$

10. Привлекая геометрические соображения, рассмотрите движение материальной точки в центральном ньютоновском поле заданного притягивающего центра S между двумя данными точками P_1 и P_2 . Найдите, какую минимальную скорость и в каком направлении необходимо сообщить материальной точке, чтобы она из положения P_1 попала в положение P_2 .

11. Баллистическая ракета должна совершить перелет между пунктами P и Q земной поверхности. Известно, что дуга большого круга PQ содержит $2\alpha \text{ рад}$. Пренебрегая вращением Земли и сопротивлением земной атмосферы и считая Землю шаром радиуса R со сферическим распределением плотности, определите минимальную начальную скорость V_0 , при которой такой перелет может быть совершен. Под каким углом φ с горизонтальной плоскостью должна быть направлена эта скорость? Какими должны быть эксцентриситет и большая полуось орбиты? Какой наибольшей высоты над земной поверхностью достигнет ракета? Какую скорость будет иметь ракета в момент максимального подъема?

12. Лунная экспедиция планирует регулярную посылку баллистических ракет из пункта P_1 с селенографическими координатами $\varphi_1 = 30^\circ$, $\lambda_1 = 60^\circ$ в пункт P_2 с координатами $\varphi_2 = -60^\circ$, $\lambda_2 = -30^\circ$. Пассивный участок траектории ракеты начинается над пунктом P_1 на высоте 22 км над лунной поверхностью и заканчивается над пунктом P_2 на такой же высоте. Считая Луну шаром радиуса $R_{\text{л}} = 1738 \text{ км}$, найдите, какую минимальную скорость должна иметь ракета в начале пассивного участка траектории, чтобы перелет был возможен. Под каким углом к плоскости местного горизонта должен быть при этом направлен вектор начальной скорости? Вращением Луны пренебречь.

13. Баллистическая ракета в заданной точке лунной поверхности должна получить скорость V_0 , равную первой космической скорости для Луны ($V_{1\text{л}} = 1,679 \text{ км/сек}$). Под каким углом к плоскости лунного горизонта должен быть направлен вектор начальной скорости V_0 для того, чтобы точка падения ракеты была максимально удалена от точки старта? На каком расстоянии d (по поверхности Луны) точка падения будет отстоять от точки старта?

§ 4. Третий закон Кеплера

Справочные сведения

Сидерический (звездный) период T обращения *) спутника вокруг притягивающего по закону Ньютона неподвижного центра и большая полуось a его орбиты связаны зависимостью, выражающей *третий закон Кеплера* **):

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K}. \quad (1)$$

Эта формула верна как в случае пассивно гравитирующего спутника, так и в случае активно гравитирующего спутника. В формуле (1) в первом случае следует считать, что $K = \mu$, где m — масса притягивающего центра, а во втором случае $K = f(m_0 + m)$, причем m_0 и m представляют собой массы притягивающего тела и спутника.

Для двух пассивно гравитирующих тел, обращающихся вокруг одного и того же притягивающего центра, из формулы (1) вытекает третий закон Кеплера в его классической формулировке:

Квадраты сидерических периодов обращений двух тел, обращающихся вокруг одного и того же притягивающего центра, относятся как кубы их средних расстояний от притягивающего центра.

В задаче двух тел имеет место так называемый «*уточненный третий закон Кеплера*».

Пусть каждая из двух активно гравитирующих материальных точек с массами m_1 и m_2 обращается вокруг притягивающей массы m_0 в согласии с решением задачи двух тел по эллиптической орбите. Пусть, далее, сидерические периоды обращений и большие полуоси их орбит соответственно равны T_1 , T_2 и a_1 , a_2 . Тогда уточненный третий закон Кеплера выразится с помощью формулы

$$\frac{T_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_0}\right)}{T_2^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_0}\right)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (2)$$

Из формулы (1) следует выражение для средней угловой скорости вращения радиуса-вектора спутника притягивающего центра

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{a^3}}. \quad (3)$$

Величина n называется в небесной механике *средним движением*.

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [5], дополнительная — [6], [8], [9].

ЗАДАЧИ

1. Согласно сообщению ТАСС, опубликованному 16 мая 1958 г., период обращения третьего советского ИСЗ 15 мая 1958 г. составлял 106^м, а наибольшая высота его над поверхностью Земли — 1880 км. Вычислите его наименьшую высоту над земной поверхностью.

*) Под *сидерическим* или *звездным периодом обращения* в астрономии понимают период обращения относительно системы координат с фиксированными в абсолютном пространстве направлениями координатных осей. В дальнейшем, если отсутствуют специальные оговорки, будет всегда подразумеваться сидерический период.

**) При отсутствии специальных замечаний в последующем интервалы времени будут предполагаться выраженными в единицах среднего солнечного времени.

2. Орбита корабля-спутника «Восток-2», на котором советский космонавт Г. С. Титов 6—7 августа 1961 г. совершил многократный облет вокруг Земли, на первых витках характеризовалась следующими числовыми значениями параметров: наибольшая высота над поверхностью Земли $H_a = 244$ км, наименьшая высота $H_n = 183$ км. Найдите сидерический период обращения корабля-спутника.

3. Космический аппарат совершает перелет к перигею лунной орбиты. Перигей орбиты аппарата находится на высоте 230 км. Известно также, что перигейная скорость аппарата является минимально возможной для реализации рассматриваемого перелета. Вычислите, сколько времени займет полет до перигея лунной орбиты. Решите аналогичную задачу для перелета к апогею лунной орбиты. Геоцентрические расстояния перигея и апогея лунной орбиты принять соответственно равными 363 300 км и 404 000 км.

4. Советский искусственный спутник Земли «Электрон-2», запущенный в январе 1964 г. для исследования радиационных поясов Земли, имел в день запуска перигейную высоту $H_n = 460$ км. Период обращения спутника составлял $22^{\text{h}}40^{\text{m}}$. Найдите апогейную высоту H_a спутника и его апогейную скорость V_a .

5. В некоторый момент времени космическая ракета выводится на лунную орбиту в точку, геоцентрический радиус-вектор которой по направлению отличается от геоцентрического радиуса-вектора Луны в тот же момент времени на 180° . Ракета начинает обращаться по лунной орбите в том же направлении, что и Луна. Упадет ли когда-нибудь эта ракета на Луну? Для простоты считать, что Луна движется по круговой орбите радиуса 383 400 км. Притяжением Луны и Солнца при решении задачи пренебречь.

6. Первая советская космическая ракета, запущенная в сторону Луны 2 января 1959 г., через несколько дней после запуска стала искусственной планетой. Перигелий ее орбиты находился на гелиоцентрическом расстоянии $146,4 \cdot 10^6$ км, а афелий — на расстоянии $197,2 \cdot 10^6$ км. Найдите период обращения этой искусственной планеты вокруг Солнца.

7. Американская космическая ракета «Пионер-5», запущенная в сторону Луны 11 марта 1960 г. и ставшая искусственной планетой, имела период обращения вокруг Солнца 312 суток. Гелиоцентрическое расстояние перигелия орбиты ракеты равно $120 \cdot 10^6$ км. Вычислите гелиоцентрическое расстояние ракеты в афелии.

8. Минимальное удаление советского спутника «Космос-11», запущенного 6 апреля 1962 г., от поверхности Земли составляло в этот день 213 км, а максимальное — 1560 км. Подсчитайте, каким был 6 апреля период обращения спутника вокруг Земли.

9. Космический аппарат движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля, и притом на столь большом расстоянии от Земли, что ее влиянием допустимо пренебречь. Аппарат получил в направлении своего движения дополнительный импульс скорости,

достаточный для достижения орбиты Марса по траектории, касающейся орбиты Марса. Сколько времени займет этот перелет? Какую скорость относительно Солнца должен был иметь космический аппарат в момент старта с земной орбиты? Гелиоцентрические орбиты Земли и Марса считать круговыми с радиусами $a_3 = 150 \cdot 10^6$ км и $a_M = 228 \cdot 10^6$ км.

10. Решите аналогичную задачу для случая, когда космический аппарат совершает перелет с земной орбиты на орбиту Венеры. Радиус круговой гелиоцентрической орбиты Венеры равен $a_V = 108 \cdot 10^6$ км.

11. Орбита американского ИСЗ «Эксплорер-6» (1959 δ 2) имела 6 февраля 1960 г. эксцентриситет $e = 0,758$, а период обращения составлял $45\ 166^s$, 2. По приведенным данным вычислите большую полуось, геоцентрические расстояния в перигее и апогее, модуль геоцентрической скорости в перигее и апогее.

12. Про двойную звезду Спика (α Vir) известно, что одна ее компонента совершает полный оборот вокруг другой за 4,1 суток. В моменты времени, когда вектор относительной скорости одной из компонент параллелен линии апсид орбиты, абсолютная величина скорости составляет 58 км/сек. Вычислите среднее расстояние между компонентами Спики, а также ее полную массу, принимая массу Солнца за единицу.

13. Зная, что Луна совершает один полный оборот вокруг Земли за 27,3 звездных суток и что ее среднее расстояние от центра Земли составляет 60,3 радиуса Земли, вычислите величину большой полуоси суточного спутника, т. е. спутника, совершающего один полный оборот вокруг Земли за одни звездные сутки.

14. Среднее суточное движение малой планеты Людовики (№ 292) составляет $881''$, 623. Вычислите период обращения этой малой планеты вокруг Солнца и ее среднее расстояние от Солнца.

15. Открытая в 1949 г. малая планета Икар (№ 1566) в своем движении очень близко подходит к Солнцу. Эксцентриситет орбиты Икара равен 0,82649, а большая полуось орбиты составляет 1,07769 а. е. Сколько времени занимает движение Икара от перигелия до афелия его орбиты? Каково наименьшее из возможных расстояний Икара от Солнца? Возмущениями в движении Икара пренебречь.

16. Вокруг некоторой планеты движется спутник. Из наблюдений известны период обращения спутника вокруг планеты, а также и период обращения планеты вокруг Солнца. Известны также размеры орбит обоих этих тел. Каким образом можно вычислить массу планеты, если за единицу массы принять массу Солнца?

17. Один из галилеевых спутников Юпитера, Ганимед, имеет период обращения вокруг Юпитера $7^d\ 03^h\ 40^m$, а большая полуось его орбиты составляет 15 радиусов Юпитера. Период обращения Луны вокруг Земли равен $27^d\ 07^h\ 40^m$, а большая полуось ее орбиты равна 60 земным радиусам. Найдите отношение средней плотности Юпитера к средней плотности Земли. Сжатием Юпитера и Земли пренебречь.

18. Докажите, что период обращения пассивно гравитирующего спутника, движущегося непосредственно около поверхности планеты, зависит только от средней плотности планеты, а не от ее размера. Какую продолжительность имел бы период обращения спутника, если средняя плотность центрального тела была бы равна плотности воды?

19. Экваториальный спутник Земли в данный момент находится в апогее своей орбиты, имеет скорость V_a и движется в восточном направлении. Известно, что если бы в этот момент его скорость равнялась местной круговой скорости $V_{кр}$, то он был бы суточным спутником. В действительности его скорость менее скорости кругового движения, и поэтому подспутниковая точка перемещается по экватору. Найдите приближенное выражение для средней скорости изменения географической долготы подспутниковой точки $(d\lambda/dt)_{ср}$.

20. Считая, что гелиоцентрическое движение Земли и геоцентрическое движение Луны происходят по компланарным круговым кеплеровским орбитам, покажите, что гелиоцентрическая орбита Луны всегда обращена к Солнцу своей вогнутостью. Отношение радиусов орбит Луны и Земли принять равным $1/400$, отношение масс Луны и Земли — $1/81$, а отношение масс Земли и Солнца — $1/330\,000$.

21. Покажите, что геоцентрическое движение какой-либо планеты имеет петлеобразный (эпициклический) характер. Объясните существование «точек стояния» и «попятного движения». Гелиоцентрические орбиты Земли и планеты принять круговыми кеплеровскими и компланарными.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Балк М. Б., Элементы динамики космического полета, «Наука», 1965.
2. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, Физматгиз, 1963.
3. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968.
4. Мультон Ф. Р., Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935.
5. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 1, Гостехиздат, 1941.

Дополнительная

6. Погорелов Д. А., Теория кеплеровых движений летательных аппаратов, Физматгиз, 1961.
7. Шарлье К., Небесная механика, пер. с нем., «Наука», 1966.
8. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», 1965.
9. Эскобал П., Методы определения орбит, пер. с англ., «Мир», 1970.

ГЛАВА IV

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕЛЕТА ПО КЕПЛЕРОВСКОЙ ОРБИТЕ

§ 1. Полет от перицентра. Уравнение Кеплера

Справочные сведения

Эллиптическая орбита. Время движения по кеплеровской орбите от ее перицентра до положения, характеризующегося значением v истинной аномалии, можно вычислить по формуле

$$t - \tau = \sqrt{\frac{p^3}{K}} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}, \quad (1)$$

где τ — момент прохождения через перицентр.

Введем в плоскости орбиты прямоугольную систему координат с началом в притягивающем центре, направив ось абсцисс x вдоль линии апсид, а ось ординат y перпендикулярно ей, так чтобы система координат была правой. В этой системе координат эллиптическая орбита может быть задана в параметрической форме с помощью уравнений

$$x = a(\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (2)$$

где E — вспомогательная угловая величина, называемая *эксцентрической аномалией* движущейся точки.

Модуль радиуса-вектора связан с эксцентрической аномалией соотношением

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (3)$$

Из (1) с помощью (3) устанавливаем связь между эксцентрической аномалией E , которая соответствует данному значению истинной аномалии v , и временем движения от перицентра до точки орбиты с указанным значением v . Она дается *уравнением Кеплера*

$$E - e \sin E = M, \quad (4)$$

в котором

$$M = n(t - \tau); \quad (5)$$

M называют *средней аномалией*, соответствующей данному значению v .

В небесной механике применяется следующее представление средней аномалии в момент t :

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad (6)$$

причем через M_0 обозначена *средняя аномалия в эпоху* t_0 :

$$M_0 = n(t_0 - \tau). \quad (7)$$

Связь между истинной и эксцентрической аномалиями дается формулой

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (8)$$

Гиперболическая орбита. Для случая гиперболического движения имеют место аналогичные формулы. Чтобы получить их, достаточно в формулах (2)–(4) заменить E на iH . После упрощений можно получить

$$x = |a| (e - \operatorname{ch} H), \quad y = |a| \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \quad (9)$$

$$r = a (1 - e \operatorname{ch} H), \quad (10)$$

$$e \operatorname{sh} H - H = n (t - \tau), \quad (11)$$

$$n = \sqrt{\frac{K}{|a|^3}}, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}. \quad (13)$$

Параболическая орбита. В этом случае связь между истинной аномалией и временем принимает вид

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} + \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 2 \sqrt{\frac{K}{p^3}} (t - \tau). \quad (14)$$

Это уравнение называется *уравнением Баркера*. Оно может быть преобразовано к виду

$$\frac{1}{3} (r + p) \sqrt{\frac{2r - p}{K}} = t - \tau. \quad (15)$$

Приближенные формулы. Приведем еще ряд формул, удобных при выполнении грубых оценок величин E , r и др.

При движении материальной точки по почти круговой орбите, т. е. по эллиптической орбите с малым эксцентриситетом, квадратом которого допустимо пренебречь, время движения от перицентра до точки орбиты с истинной аномалией v можно вычислять по следующей приближенной формуле:

$$t - \tau \approx \frac{T}{2\pi} (v - e \sin v), \quad (16)$$

где T — период обращения.

С той же степенью точности можно получить следующие формулы для вычисления E , v , r и др.:

$$E \approx M + e \sin M, \quad (17)$$

$$r \approx a (1 - e \cos M), \quad (18)$$

$$v \approx M + 2e \sin M, \quad (19)$$

$$V_r \approx nae \sin M, \quad (20)$$

$$V_p \approx na (1 + e \cos M). \quad (21)$$

Литература: основная — [1] — [5], дополнительная — [6] — [10].

ЗАДАЧИ

1. Космическая ракета на высоте 230 км над земной поверхностью получила параболическую скорость в горизонтальном направлении. Через некоторое время она достигла орбиты Луны, оказавшись на геоцентрическом расстоянии 384 000 км. Сколько времени занял этот перелет?

2. Космическая ракета двигалась по кеплеровской круговой гелиоцентрической орбите, близкой к орбите Земли, радиус которой можно принять равным $150 \cdot 10^6$ км. После непродолжительного включения ракетного двигателя скорость ракеты изменилась и стала равной параболической, причем вектор этой скорости оказался расположенным в плоскости орбиты Нептуна и направленным перпендикулярно гелиоцентрическому радиусу-вектору ракеты. Сколько времени потребуется затем ракете для полета с выключенным двигателем до орбиты Нептуна? Орбиту Нептуна считать окружностью, радиус которой равен $30,1$ а. е.

3. Материальная точка движется по кеплеровской эллиптической орбите с эксцентриситетом $e = 0,5$. В некоторый момент времени истинная аномалия движущейся точки составляет 90° . Найдите значение эксцентрической аномалии в этот момент. Какова истинная аномалия точки в тот момент, когда ее эксцентрическая аномалия равна 90° ?

4. Хорда земной орбиты, проведенная через ее фокус перпендикулярно линии апсид, делит эту орбиту на две дуги. Сколько времени затрачивает Земля на движение по каждой из этих дуг? Эксцентриситет земной орбиты принять равным $1/60$.

5. Космический аппарат при выходе на геоцентрическую эллиптическую орбиту на высоте 230 км над земной поверхностью имеет начальную скорость $V_0 = 10,95$ км/сек. Вектор скорости в этот момент направлен перпендикулярно геоцентрическому радиусу-вектору и лежит в плоскости лунной орбиты. Найдите время полета аппарата до лунной орбиты, считая, что Луна движется вокруг Земли по окружности радиуса $r = 384\,400$ км.

6. Решите предыдущую задачу в предположении, что $V_0 = 12,0$ км/сек.

7. Корабль-спутник выведен на околоземную орбиту, которая характеризуется следующими значениями параметров: высота в перигее $H_n = 180$ км, высота в апогее $H_a = 340$ км, момент прохождения через перицентр $\tau = 9^h00^m$ по московскому времени. На первом же витке должно быть включено тормозное устройство, которое позволит кораблю приземлиться в заранее указанном районе. Предварительные расчеты показали, что для этой цели следует включить тормозное устройство в тот момент, когда истинная аномалия корабля составит 270° . Вычислите, в какой момент времени следует включить тормозное устройство.

8. Планета сферической структуры имеет радиус R и гравитационный параметр K . Известны высоты H_n и H_a искусственного спутника этой планеты в моменты его прохождения через перицентр и апоцентр орбиты. Отношение $(H_a - H_n)/R < 0,1$. Получите приближенную формулу для вычисления высоты спутника в любой заданный момент времени.

9. Относительно спутника той же планеты (см. предыдущую задачу) известны H_n , H_a и высота H в некоторый момент времени t ,

В предположении, что отношение $(H_a - H_n)/R$ мало, укажите способ для нахождения момента τ прохождения спутника через его перигентр.

10. Известны период T обращения искусственного спутника Земли, момент τ его прохождения через перигей орбиты и высота H в некоторый момент времени t . Орбита мало отличается от окружности. Вычислите эксцентриситет орбиты.

11. Космический корабль «Восток», на котором Ю. А. Гагарин совершил первый в мире космический полет вокруг Земли, стартовал 12 апреля 1961 г. в 9^h07^m по московскому времени. Наибольшая высота корабля над поверхностью Земли составляла 327 км, наименьшая — 181 км. Будем считать, что корабль прошел через перигей в 9^h10^m (это значение, возможно, отличается от истинного момента прохождения корабля через перигей). Тормозное устройство было включено в 10^h25^m по московскому времени. Каковы были в этот момент истинная аномалия корабля и его высота над поверхностью Земли?

12. Искусственный спутник Земли совершает полный оборот вокруг центра Земли за 6^h звездного времени. Эксцентриситет его орбиты равен 0,05. На какой угол повернется радиус-вектор спутника за 1^h,5 звездного времени после момента прохождения через перигей? Какими окажутся по истечении этого срока средняя аномалия спутника, его эксцентрическая аномалия, геоцентрическое расстояние, скорость?

13. Спутник Земли движется по орбите с эксцентриситетом 0,6 и большой полуосью, равной 4 средним радиусам Земли. Известно, что 4 июня 1972 г. в 12^h00^m по московскому времени истинная аномалия спутника составит 240°00'. Вычислите, когда впервые после указанного момента спутник окажется в своем перигее.

14. Комета Галлея ($e = 0,967281$, $a = 17,047$ а. е.) приближается к Солнцу. В течение какого времени (в пределах одного оборота вокруг Солнца) комета будет находиться ближе к Солнцу, чем Земля? Приблизительно вычислите искомое время полета, заменяя реальную орбиту кометы параболической с тем же перигелием. Орбиту Земли считать круговой с радиусом, равным 1 а. е.

15. Пусть в моменты t_0 и t материальная точка, движущаяся по кеплеровской эллиптической орбите, имела соответственно средние аномалии M_0 и M и эксцентрические аномалии E_0 и E . Докажите, что

$$M - M_0 = E - E_0 + 2S \sin^2 \frac{E - E_0}{2} - C \sin(E - E_0),$$

где $S = e \sin E_0$, $C = e \cos E_0$. Получите аналогичную зависимость для гиперболического движения.

16. В начале рассматриваемого участка перелета космический аппарат, движущийся в гравитационном поле Солнца, находился в своем перигелии, в конце участка — на гелиоцентрическом расстоянии r . При этом радиус-вектор аппарата повернулся меньше чем на половину оборота

вокруг Солнца. Сколько времени занял перелет? Получите явное выражение времени перелета через величины a , e , r и K , считая, что движение происходит по эллиптической орбите.

17. Выразите модуль скорости материальной точки, движущейся по кеплеровской эллиптической или гиперболической орбите, а также радиальную и тангенциальную ее составляющие через величины a , e , K и E (или соответственно H).

18. Орбита материальной точки — кеплеровский эллипс или гипербола. Известны значения параметров a , e и K . Сколько времени будет продолжаться движение материальной точки от перицентра до точки орбиты с истинной аномалией φ ?

19. Баллистическая ракета совершает перелет между двумя точками C и D лунной поверхности по траектории минимальной энергии (т. е. получив в точке старта минимальную скорость, достаточную для реализации такого перелета). Известны селенографические координаты точек C и D :

$$C(\varphi_1 = 30^\circ, \lambda_1 = 60^\circ), \quad D(\varphi_2 = -60^\circ, \lambda_2 = -30^\circ).$$

Вычислите, сколько времени займет такой перелет, считая известным период обращения спутника Луны, движущегося непосредственно над ее поверхностью, равный $T_0 = 1^{\text{h}}48^{\text{m}}24^{\text{s}}$. При решении задачи пренебречь несферичностью Луны и ее вращением вокруг оси.

20. Полный угол, описываемый радиусом-вектором спутника за один оборот по кеплеровской эллиптической орбите вокруг притягивающего центра, разделим на m равных углов лучами, исходящими из притягивающего центра. Найдем среднее арифметическое расстояний спутника от центра притяжения, соответствующих выполненному делению угла. Затем перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$. Докажите, что полученное таким путем «среднеугловое» расстояние спутника от притягивающего центра равно малой полуоси орбиты.

21. Период T обращения спутника разделим на m равных промежутков и вычислим в конце каждого из этих промежутков расстояние от спутника до притягивающего центра. Найдем далее среднее арифметическое этих расстояний и перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$. Докажите, что этот предел, представляющий «средневременное» расстояние от притягивающего центра, равен $a(1 + e^2/2)$.

22. Разделим кеплеровскую эллиптическую орбиту на m равных по длине дуг. В каждую из точек деления проведем из притягивающего центра радиус-вектор. Вычислим среднее арифметическое модулей этих радиусов-векторов, перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$. Докажите, что этот предел, представляющий собой «среднедуговое» расстояние движущейся точки от притягивающего центра, равен большой полуоси орбиты a .

23. Материальная точка единичной массы движется вокруг притягивающего центра по эллиптической орбите. Вычислите среднее

(по времени) значение кинетической энергии этой точки за один оборот вокруг притягивающего центра.

24. Материальная точка движется вокруг притягивающего центра по эллиптической орбите. Вычислите средневременное μ_t и средне-дуговое μ_v значения обратной величины модуля радиуса-вектора за один оборот.

§ 2. Решение уравнения Кеплера

Справочные сведения

Метод неподвижной точки. Если эксцентриситет кеплеровской эллиптической орбиты настолько мал, что его квадратом можно пренебречь (случай почти круговой орбиты), то для вычисления эксцентрической аномалии E (а также различных функций от E) по данному значению средней аномалии M можно воспользоваться весьма простыми приближенными формулами, вытекающими из уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M. \quad (1)$$

Такие формулы приведены в § 1 (см. формулы (4.1.17) — (4.1.21)).

При произвольных значениях e ($0 < e < 1$) при решении уравнения (1) относительно E пользуются различными итерационными методами, из которых наиболее простым, пожалуй, является «метод неподвижной точки» («метод простых итераций»). Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть ищется корень уравнения

$$x = f(x). \quad (2)$$

Пусть, кроме того, известно, что на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ обладает первой производной, и существует такая константа q , что для каждого x из $[a, b]$

$$|f'(x)| \leq q < 1. \quad (3)$$

Тогда на отрезке $[a, b]$ уравнение (1) имеет корень и притом единственный; при любом выборе числа x_0 из $[a, b]$ последовательность чисел

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots \quad (4)$$

сходится к этому корню.

Метод Ньютона. Для решения уравнения Кеплера можно пользоваться итерационным методом Ньютона, согласно которому последовательные приближения к искомому корню уравнения

$$F(x) = 0 \quad (5)$$

строятся по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}. \quad (6)$$

Этот метод можно рассматривать как разновидность метода неподвижной точки. В самом деле, если на том промежутке, на котором мы разыскиваем корень уравнения (5), $F'(x) \neq 0$, то уравнение (5) равносильно уравнению

$$x = f(x),$$

где

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}.$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть число E_n принято за приближенное значение корня \bar{E} уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M \quad (e < 1)$$

(«история появления» числа E_n нас здесь не интересует). Для оценки погрешности этого приближения вычисляют еще E_{n+1} по формуле

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n$$

и пользуются неравенством

$$|\bar{E} - E_n| \leq \frac{1}{1-e} |E_{n+1} - E_n|.$$

Докажите справедливость такой оценки.

2. При решении уравнения Кеплера для гиперболического движения

$$H = e \operatorname{sh} H - M$$

можно воспользоваться функцией $y = \operatorname{Arsh} x$, обратной по отношению к функции $x = \operatorname{sh} y$. Данное уравнение предварительно преобразуется к виду

$$H = \operatorname{Arsh} \frac{H+M}{e}.$$

Пусть некоторое число H_n принято в качестве приближенного значения искомого корня \bar{H} , а число H_{n+1} найдено по формуле

$$H_{n+1} = \operatorname{Arsh} \frac{H_n + M}{e}.$$

Оцените погрешность $|\bar{H} - H_n|$.

3. Для случая эллиптического движения с малым эксцентриситетом, куб которого пренебрежимо мал, пулковский астроном Гюльден предложил следующую приближенную формулу для вычисления эксцентрисической аномалии:

$$\operatorname{ctg} E = \frac{\sin M}{\cos M - e}.$$

Объясните, каким образом может быть получена эта формула.

4. Пользуясь методом неподвижной точки, вычислите эксцентрисическую аномалию спутника, если $e = 0,2$, $M = 214^\circ$.

5. Пользуясь итерационным методом Ньютона и полагая $E_0 = M$, напишите формулы для приближений E_1 и E_2 к искомому корню E уравнения Кеплера $E - e \sin E = M$.

6. Для малой планеты Людовики (№ 292) угол эксцентриситета $\varphi = \operatorname{arcsin} e$ орбиты составляет $1^\circ 41',3$, среднее суточное движение

$n = 14',678$. Пользуясь методом неподвижной точки, вычислите эксцентрическую аномалию Людовики через 22,5 суток после ее прохождения через перигелий. Найдите также E а) методом Ньютона, б) методом Гюльдена.

7. Спутник Земли прошел через свой перигей в 4^h47^m по московскому времени. Известно, что большая полуось $a = 1,2R_3$ (R_3 — средний радиус Земли), $e = 0,1$. Вычислите значения эксцентрической аномалии и геоцентрического расстояния спутника в 5^h27^m того же дня.

8. Суточный спутник Земли движется по орбите с эксцентриситетом $e = 0,3$. Вычислите через 8^h звездного времени после прохождения через перигей числовые значения истинной аномалии, модуля геоцентрического радиуса-вектора, высоту над поверхностью Земли и найдите вектор скорости в этот момент.

9. Искусственный спутник Земли был запущен в качестве зонда для исследования свойств космического пространства на расстоянии нескольких десятков тысяч километров от Земли на эллиптическую орбиту с элементами $a = 10^5$ км, $e = 0,5$. Требуется предвычислить значения эксцентрической аномалии E , истинной аномалии v и геоцентрического расстояния r спутника через τ мин после прохождения спутника через перигей. Значение E следует вычислить с точностью до $0,01$ рад. Рассмотрите случаи $\tau = 50^m$, $\tau = 300^m$.

10. Искусственный спутник Земли имел перигей на геоцентрическом расстоянии 6600 км (т. е. примерно на высоте 230 км над поверхностью Земли), а апогей — на геоцентрическом расстоянии 7400 км (т. е. на высоте 1030 км). Спутник прошел через свой перигей в 4^h по московскому времени. В 5^h20^m было включено тормозное устройство спутника. Найдите для этого момента значение эксцентрической аномалии E спутника, его истинную аномалию v и высоту h над поверхностью Земли.

11. Советская автоматическая станция «Луна-4», запущенная в сторону Луны в 1963 г., после прохождения в окрестности Луны стала обращаться вокруг Земли по орбите, которая сначала была весьма близка к эллипсу. На первом витке максимальное удаление станции от центра Земли составляло 700 000 км, а минимальное — 90 000 км. На каком расстоянии от центра Земли оказалась станция через двое суток после прохождения через перигей?

12. Межпланетный зонд стартует с искусственного спутника Земли. В 12^h по московскому времени зонд оказался на высоте 630 км над поверхностью Земли, причем его скорость составляла $14,0$ км/сек и была направлена перпендикулярно его геоцентрическому радиусу-вектору. Требуется установить: на каком расстоянии от центра Земли будет находиться зонд в 22^h московского времени в те же сутки?

13. Искусственный спутник Земли прошел через свой перигей в момент $\tau = 1960$, фев., 3, $8^h55^m,58$ UT. Период обращения спутника составлял $752^m,77$, эксцентриситет орбиты был равен $e = 0,758$. Укажите момент времени, когда эксцентрическая аномалия спутника

равнялась $144^{\circ},9$. Вычислите эксцентрическую аномалию, истинную аномалию и геоцентрическое расстояние спутника по истечении $1/4$ периода обращения после момента прохождения спутника через перигей.

14. Для решения уравнения Баркера

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\nu}{2} + \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = D,$$

где

$$D = 2 \sqrt{\frac{K}{\rho^3}} (t - \tau),$$

с помощью тригонометрических и логарифмических таблиц иногда пользуются следующим алгоритмом:

а) вычисляют вспомогательный угол β ($-90^{\circ} < 2\beta < 90^{\circ}$) из условия

$$\frac{2}{3} \operatorname{ctg} 2\beta = D;$$

б) находят затем вспомогательный угол γ ($-90^{\circ} < \gamma < 90^{\circ}$) из условия

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \beta};$$

в) определяют угол ν из уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = 2 \operatorname{ctg} 2\gamma.$$

Дайте математическое обоснование этому методу. Пользуясь им, вычислите истинную аномалию и гелиоцентрическое расстояние параболической кометы в момент t , отстоящий от момента прохождения через перигелий τ на величину

$$t - \tau = -36,55397 \text{ ср. солн. суток.}$$

Известно также, что $r_{\text{н}} = 0,33048$ а. е.

15. Космический корабль движется по круговой гелиоцентрической орбите. Благодаря мгновенному касательному импульсу корабль перешел на параболическую орбиту, перигелий которой отстоит от Солнца на расстоянии, равном 1 а. е. Момент прохождения корабля через перигелий — 1980, май, $1,12^{\text{h}}0^{\text{m}}0^{\text{s}}$ московского времени. На каком геоцентрическом расстоянии окажется корабль спустя точно двадцать лет (имеется в виду тропический год)?

§ 3. Ряды для кеплеровского эллиптического движения

Справочные сведения

Основные разложения. В случае эллиптического движения эксцентрисетическая аномалия разлагается в следующий ряд по степеням эксцентриситета:

$$E = M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (\sin^k M), \quad (1)$$

который сходится для всех значений эксцентриситета, не превосходящих предела Лапласа

$$e < 0,6627 \dots \approx \frac{2}{3}$$

(точнее, ряд сходится при $e < \sqrt{\rho^2 - 1}$, где ρ — вещественный корень уравнения $\exp 2\rho = (\rho + 1)/(\rho - 1)$).

При любом выборе целой функции *) $F(E)$ имеет место разложение

$$F(E) = F(M) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} [F'(M) \sin^k M]. \quad (2)$$

Его область сходимости совпадает с областью сходимости ряда (1).

С помощью (2) можно получить следующие разложения:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos M + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^k}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dM^{k-2}} (\sin^k M) = \\ &= 1 - e \cos M - \frac{1}{2} e^2 (\cos 2M - 1) - \frac{3}{8} e^3 (\cos 3M - \cos M) + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{1}{12} e^3 (13 \sin 3M - 3 \sin M) + \dots \quad (4)$$

При практическом применении рядов (1)–(4) можно считать, что при замене ряда частичной суммой допущенная погрешность при малых e ($e < 0,3$) имеет такой же порядок, как и первый отброшенный член.

Ряд Лагранжа. Имеет место общая теорема о разложении неявной функции в степенной ряд, а именно:

Пусть $H(u)$ и $F(u)$ — какие-либо аналитические функции комплексного переменного u в окрестности точки $u=0$, и пусть переменные u , ζ , z связаны зависимостью

$$u = \zeta + zH(u).$$

Тогда при достаточно малых по модулю комплексных значениях переменного z возможно функцию $F(u)$ разложить в степенной ряд по степеням ζ :

$$F(u) = F(\zeta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}} \{H^k(\zeta) F'(\zeta)\}. \quad (5)$$

Из этой теоремы, в частности, получаем ряд (2).

*) Целая функция может быть разложена в степенной ряд относительно своего аргумента, причем этот ряд сходится для всех комплексных значений аргумента.

Решение уравнения Кеплера. При любом значении $0 < e < 1$ решение уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M$$

разлагается в следующий ряд Фурье:

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM, \quad (6)$$

где $J_k(x)$ — функция Бесселя порядка k , которая задается следующим степенным рядом:

$$J_k(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2\nu}. \quad (7)$$

Функция Бесселя $J_k(x)$ может быть определена как коэффициент в разложении производящей функции $\exp\left[\frac{1}{2}x\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$ в ряд по положительным и отрицательным степеням z :

$$\exp\left[\frac{1}{2}x\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) z^k. \quad (8)$$

Л и т е р а т у р а: основная — [2] — [5], дополнительная — [6], [8] — [10].

ЗАДАЧИ

1. Материальная точка, притягиваемая неподвижным центром, совершает перелет по дуге эллиптической орбиты. Начало дуги имеет истинную аномалию $-\omega$, а конец дуги — истинную аномалию $\nu - \omega$. Покажите, что время перелета может быть представлено в виде степенного ряда относительно эксцентриситета

$$t = \frac{T}{2\pi} \left\{ \nu - 2e [\sin(\nu - \omega) + \sin \omega] + \frac{3}{4} e^2 [\sin 2(\nu - \omega) + \sin 2\omega] + \dots \right.$$

где T — период обращения точки.

2. Используя ряд Лагранжа, вычислите для астероида Флорентины (№ 321) эксцентрисическую аномалию E , истинную аномалию ν и модуль радиуса-вектора r в тот момент, когда средняя аномалия составляла $50^\circ 16', 0$. Большая полуось орбиты равна $a = 2,881$ а. е., угол эксцентриситета $\varphi = 2^\circ 39', 05$.

3. Эксцентриситет e орбиты спутника настолько мал, что допустимо пренебречь его кубом. Среднее движение спутника составляет n сек $^{-1}$. Через сколько времени после прохождения спутника через перицентр его средняя аномалия будет больше всего отклоняться от истинной аномалии? Чему равно это наибольшее отклонение?

4. Насколько отличается истинная аномалия астероида Гедды (№ 207) от ее средней аномалии в тот момент, когда последняя равна $125^\circ 36', 6$? Угол эксцентриситета орбиты Гедды составляет $1^\circ 40', 7$. При каком

значении средней аномалии спутника, взятой между 0° и 180° , она будет сильнее всего отличаться от его истинной аномалии?

5. В некоторых формулах небесной механики используются выражения вида β^m , где $\beta = \frac{1}{e} (1 - \sqrt{1 - e^2})$, а m — натуральное число. Принимая во внимание, что

$$\beta = \frac{e}{2} + \frac{e}{2} \beta^2,$$

и пользуясь рядом Лагранжа, разложите β^m в ряд по степеням e .

6. Вычислите первые три члена разложения в ряд Лагранжа каждой из следующих функций от эксцентрической аномалии E :

$$\frac{a}{r}, \left(\frac{r}{a}\right)^2.$$

7. Функцию Бесселя $J_n(x)$ можно задать с помощью интеграла

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt.$$

Пользуясь только этим интегральным представлением функции Бесселя, получите следующие разложения функций E , $e \sin E$ и a/r в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} E &= M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin nM, \\ e \sin E &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin nM, \\ \frac{a}{r} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \cos nM. \end{aligned}$$

8. а) Пусть $W = F(E)$ — какая-либо дифференцируемая функция вещественного переменного E , а E — дважды дифференцируемая функция двух переменных M и e . Убедитесь в справедливости тождества

$$\frac{\partial}{\partial e} \left[F(E) \frac{\partial E}{\partial M} \right] \equiv \frac{\partial}{\partial M} \left[F(E) \frac{\partial E}{\partial e} \right].$$

б) Пусть неявная функция E двух независимых вещественных переменных e и M задается (при достаточно малых e) с помощью уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M.$$

Пусть $\omega = f(E)$ — аналитическая функция переменного E . Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{\partial^n \omega}{\partial e^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \left[f'(M) \sin^n M \frac{\partial E}{\partial M} \right].$$

в) Пользуясь результатом пункта б), докажите: при любом выборе аналитической функции $\varpi = f(E)$, где E определяется неявно уравнением Кеплера, функция $\varpi = f(E)$ при достаточно малых e разлагается в следующий степенной ряд относительно e :

$$f(E) = f(M) + ef'(M) \sin M + \frac{e^2}{2!} \frac{d}{dM} [f'(M) \sin^2 M] + \dots + \\ + \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} [f'(M) \sin^n M] + \dots$$

9. а) Пользуясь рядом Лагранжа, разложите в ряд по степеням ϖ функцию

$$z = \frac{1 - \sqrt{1 - 2t\varpi + \varpi^2}}{\varpi}.$$

б) Найдите затем разложение в ряд по степеням ϖ следующей функции:

$$\psi(\varpi) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t\varpi + \varpi^2}}.$$

в) Полином Лежандра $P_n(t)$ можно определить как коэффициент при ϖ^n в разложении производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2t\varpi + \varpi^2}}$$

в ряд по степеням ϖ . Найдите явное выражение $P_n(t)$ как функции t .

г) Продифференцировав по ϖ тождество

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2t\varpi + \varpi^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \varpi^n,$$

получите рекуррентную зависимость между полиномами Лежандра.

§ 4. Формула Ламберта

Справочные сведения

Случай эллиптической орбиты. Время $t_2 - t_1$, необходимое для перелета по дуге P_1P_2 кеплеровской эллиптической орбиты, определяется по формуле Ламберта

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{n} [(\sin \lambda_2 - \lambda_2) - (\sin \lambda_1 - \lambda_1)]. \quad (1)$$

В этой формуле λ_1 и λ_2 — корни уравнений

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_1 &= 1 - \frac{r_1 + r_2 + s}{2a}, \\ \cos \lambda_2 &= 1 - \frac{r_1 + r_2 - s}{2a}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

причем через r_1 и r_2 обозначены расстояния от притягивающего центра до концов дуги P_1P_2 , s —длина хорды P_1P_2 , a —большая полуось орбиты. Выбор надлежащих значений λ_1 и λ_2 среди корней уравнений (2) производится следующим образом. Пусть $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$ —те корни уравнений (2), которые заключены между 0 и π , Δ —часть эллипса, заключенная между дугой P_1P_2 и стягивающей ее хордой, A —притягивающий центр, F —«пустой» фокус орбиты. Тогда следует полагать

$$\lambda_1 = \begin{cases} \bar{\lambda}_1, & \text{если } F \in \Delta, \\ 2\pi - \bar{\lambda}_1, & \text{если } F \notin \Delta. \end{cases} \quad \lambda_2 = \begin{cases} \bar{\lambda}_2, & \text{если } A \in \Delta, \\ -\bar{\lambda}_2, & \text{если } A \notin \Delta. \end{cases}$$

Случай гиперболической орбиты. Время, необходимое для перелета по дуге гиперболической орбиты, вычисляется по формуле

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{n} [(\lambda_2 - \text{sh } \lambda_2) - (\lambda_1 - \text{sh } \lambda_1)], \quad (3)$$

причем числа λ_1 и λ_2 находятся из уравнений

$$\text{ch } \lambda_1 = 1 + \frac{r_1 + r_2 + s}{2|a|}, \quad \text{ch } \lambda_2 = 1 + \frac{r_1 + r_2 - s}{2|a|}. \quad (4)$$

Здесь a —действительная полуось орбиты, $n = \sqrt{K/|a|^3}$, а r_1 , r_2 и s имеют тот же смысл, что и в случае эллиптической орбиты. Если движущаяся материальная точка проходит дугу P_1P_2 после прохождения через перигентр, то следует брать $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$.

Случай параболической орбиты. Время перелета по дуге P_1P_2 параболической орбиты выражается формулой Эйлера

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{6\sqrt{K}} [(r_1 + r_2 + s)^{3/2} \pm (r_1 + r_2 - s)^{3/2}]. \quad (4)$$

Знак $+$ берется тогда, когда разность истинных аномалий в конечной и начальной точках дуги P_1P_2 больше 180° , знак $-$ в противном случае.

Литература: основная—[1], [5]; дополнительная—[9], [10].

ЗАДАЧИ

1. Космический аппарат совершает перелет с орбиты Земли к орбите Марса (см. рис. 4.1, на котором C —начальная точка перелета, D —конечная). Перелет происходит на таких расстояниях от Земли и Марса, что можно пренебречь притяжением этих планет и учитывать только силу тяготения Солнца S . Гелиоцентрические расстояния перигелия и афелия орбиты перелета равны соответственно $120 \cdot 10^6$ км и $240 \cdot 10^6$ км. Известно, что $SC = 150 \cdot 10^6$ км,

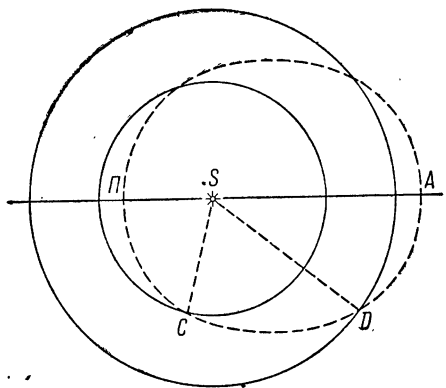


Рис. 4.1.

и $SD = 150 \cdot 10^6$ км.

$SD = 228 \cdot 10^6$ км. Сколько времени должен занять этот перелет?

2. Космический аппарат получил в точке C вблизи орбиты Земли на гелиоцентрическом расстоянии $150 \cdot 10^6$ км скорость (относительно Солнца) 50 км/сек. Через некоторое время он достигнет орбиты Юпитера (окажется в точке D на расстоянии $800 \cdot 10^6$ км от Солнца). Угловая дальность перелета составляет 90° . Сколько времени должен занять этот перелет? Полет совершается в таких условиях, что достаточно учитывать лишь тяготение снаряда к Солнцу.

3. Космический аппарат совершает перелет с орбиты Земли к орбите Марса. В точке C на земной орбите его скорость (относительно Солнца) составляла $42,1$ км/сек. Точка D , через которую должен пройти аппарат и которая находится на орбите Марса, выбирается таким образом, чтобы угловая дальность перелета составляла 60° . Условия перелета таковы, что можно пренебречь тяготением Земли и Марса. Сколько времени должен занять рассматриваемый перелет?

4. Установите справедливость уравнения Эйлера, исходя из уравнения Ламберта.

5. При определении параболической орбиты по двум близким положениям формула Эйлера оказывается неудобной из-за необходимости вычислять разность двух близких величин. Докажите, что в этом случае формула Эйлера может быть преобразована к форме:

$$6(t_2 - t_1) = K^{-1/2} (r_1 + r_2)^{3/2} \left[3 \frac{s}{r_1 + r_2} - \frac{3}{4 \cdot 6} \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^3 - \frac{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{s}{r_1 + r_2} \right)^5 - \dots \right].$$

§ 5. Импульсный орбитальный маневр в центральном ньютоновском поле тяготения

Справочные сведения

В приведенных ниже задачах предполагается, что переход материальной точки с одной ее кеплеровской орбиты (относительно данного притягивающего центра) на другую кеплеровскую орбиту (относительно того же притягивающего центра) происходит вследствие мгновенного (импульсного) изменения вектора скорости этой материальной точки по величине или направлению. Такое изменение происходит благодаря включению тяги на непродолжительное время, причем подразумевается, что изменением положения материальной точки в течение этого времени допустимо пренебречь (точнее, это изменение пренебрежимо мало по сравнению с модулем радиуса-вектора точки).

Переход с одной орбиты на другую, возникающий в результате k -кратного импульсного изменения скорости, называют k -импульсным переходом. Одноимпульсный переход иногда называют изменением орбиты. Если при этом параметры орбиты меняются мало, то говорят о коррекции орбиты.

Л и т е р а т у р а: основная — [1], дополнительная — [6], [10].

ЗАДАЧИ

1. Круговой спутник Земли получил импульс скорости ΔV , равный по величине местной параболической скорости, направленный перпендикулярно радиусу-вектору спутника и под углом 135° к вектору его скорости. Как изменится орбита спутника?

2. Космический аппарат движется по гелиоцентрической эллиптической орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом e . В тот момент, когда истинная аномалия спутника была равна v , он получил дополнительный тангенциальный импульс скорости ΔV в направлении движения, после чего он стал двигаться по некоторой другой эллиптической орбите.

Какими стали большая полуось и эксцентриситет орбиты аппарата? На какой угол повернулась вокруг центра Солнца линия апсид?

3. В конце активного участка траектории ИСЗ находился на гелиоцентрическом расстоянии $r_0 = 2R_3$ (где R_3 — средний радиус Земли). Кроме того, известно, что $r_0 V_0^2 / K = 1,40$, $\beta = 70^\circ$. В момент, когда истинная аномалия $v = 150^\circ$, спутник должен получить такой импульс скорости, чтобы большая полуось его орбиты стала бы равной $a' = 3,6 R_3$, а ось апсид сохранила бы свое положение. Вычислите этот импульс скорости. Под каким углом к радиусу-вектору спутника он должен быть направлен? Как изменилась бы орбита спутника, если бы в момент, когда $v = 150^\circ$, такой же по величине импульс скорости был им получен в направлении движения? (В задаче β — угол между радиусом-вектором спутника и вектором его скорости.)

4. Благодаря дополнительному импульсу скорости космический аппарат, имевший скорость V_1 , приобрел скорость V_2 . При этом вектор V_2 составлял с плоскостью первоначальной орбиты угол φ , а угол между его проекцией на эту плоскость и вектором V_1 был равен ψ . Найдите величину импульса скорости, потребовавшегося для указанного маневра.

5. Космический аппарат должен совершить двухимпульсный переход с эллиптической орбиты Γ_1 на компланарную и соосную с Γ_1 орбиту Γ_2 (Γ_2 содержит внутри себя Γ_1 и линии их апсид одинаково направлены). Эксцентриситеты e_1 и e_2 и большие полуоси a_1 и a_2 этих орбит известны.

Для этой цели избран переходный эллипс, который касается орбиты Γ_1 в ее перигентре и орбиты Γ_2 в ее апоцентре. Какой полный импульс скорости потребуется для такого перехода?

6. Материальная точка, движущаяся в поле тяготения неподвижного центра, получила в касательном направлении малый импульс скорости ΔV . Как это повлияет на истинную аномалию этой точки?

7. Космический корабль C и ракета-перехватчик P двигались по одной и той же круговой гелиоцентрической орбите, радиус которой равен 1 а. е., причем перехватчик отставал от корабля на

некоторый (неизвестный) угол φ_0 . В некоторый момент времени, когда перехватчик находился в точке P_1 своей орбиты, он получил дополнительный импульс скорости ΔV_1 в направлении своего движения (касательный импульс), вследствие чего он стал двигаться с параболической скоростью. Через некоторое время перехватчик догнал корабль в точке P_2 , симметричной точке P_1 относительно центра Солнца, и, получив дополнительный импульс скорости ΔV_2 , стыковался с кораблем. После стыковки совместный полет происходил по первоначальной орбите.

Вычислите время, потребовавшееся перехватчику для выполнения этого маневра; угол φ_0 , на который перехватчик отставал от корабля перед началом маневра; величины импульсов ΔV_1 и ΔV_2 .

8. Два спутника Земли S_1 и S_2 движутся по одной и той же круговой орбите радиуса $r = 3R_3$ в одном направлении. Они находятся соответственно в точках P_1 и P_2 , причем $\angle P_1TP_2 = 80^\circ$. Спутник S_1 , который находится позади спутника S_2 , должен перехватить спутник S_2 в заданной точке P_3 и после перехвата продолжить вместе со спутником S_2 полет по исходной орбите. Дано, что $\angle P_2TP_3 = 40^\circ, 5$. Какие импульсы должен получить спутник S_1 для выполнения этого маневра?

Для решения задачи можно воспользоваться «способом проб и ошибок».

9. Космический аппарат, совершающий межпланетный перелет, стартует с круговой орбиты искусственного спутника Земли радиуса r . Гелиоцентрическая орбита перелета должна быть эллипсом с большой полуосью a а. е. и эксцентриситетом e . Покажите, что величина импульса скорости ΔV , который нужно сообщить аппарату, определяется формулой

$$\Delta V = \sqrt{V_3^2 + V^2 - 2V_3V \cos \vartheta} - \sqrt{K/r},$$

где

$$\cos \vartheta = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{2-1/a}},$$

а V_3 — гелиоцентрическая скорость Земли, $V = V_3 \sqrt{2 - \frac{1}{a}}$ — гелиоцентрическая скорость космического аппарата, K — гравитационный параметр Земли.

§ 6. Приложения комплексных переменных в небесной механике

Справочные сведения

Формула Эйлера. Переход от вещественных переменных к комплексным и использование свойств аналитических функций оказывается полезным при решении разнообразных задач небесной механики.

Заметные упрощения в выкладках достигаются благодаря привлечению известной формулы Эйлера *).

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (1)$$

В этой формуле z — произвольное комплексное число, а $\cos z$, $\sin z$, e^z определяются их разложениями в степенные ряды

$$\left. \begin{aligned} e^z &\equiv \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Комплексная форма уравнения движения в задаче двух тел. Пусть в качестве начала координат избран притягивающий центр, и пусть двигающаяся в его гравитационном поле материальная точка S имеет в каждый момент t комплексную координату $w(t)$ (иными словами, в момент t двигающаяся точка S совпадает с той точкой комплексной плоскости, которой соответствует комплексное число $w(t)$). Вектору скорости точки S также соответствует некоторое комплексное число, которое будем называть комплексной скоростью (или ее скоростью, записанной в комплексной форме).

Комплексная скорость материальной точки S в момент t равна $\frac{dw}{dt}$.

Дифференциальное уравнение ограниченной задачи двух тел можно переписать в комплексной форме:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{Kw}{|w|^3}. \quad (3)$$

Пользуясь этим уравнением, нетрудно с помощью операций над комплексными переменными получить первые интегралы задачи двух тел и уравнение орбиты.

Литература: [1].

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь уравнением движения (3), докажите, что в задаче двух тел справедливы зависимости

$$r^2 \dot{v} = \sigma,$$

где σ — вещественная постоянная (постоянная площадей), и

$$V^2 = \frac{2K}{r} + h,$$

где h — вещественная постоянная (постоянная живых сил).

2. Получите интеграл Лапласа в комплексной форме

$$\Lambda = -i\sigma \dot{w} - Ke^{iv},$$

где Λ — комплексная постоянная.

*) В пределах данного параграфа будем, как это принято в теории функций комплексного переменного, обозначать через i мнимую единицу ($i^2 = -1$), через e — основание неперовых логарифмов; эксцентриситет будем здесь временно обозначать через ε .

Покажите, что систему координат можно выбрать таким образом, чтобы в интеграле Лапласа постоянная Λ была бы вещественным неотрицательным числом.

3. Пользуясь интегралом Лапласа, получите уравнение непрямолинейной кеплеровской орбиты.

4. Пользуясь дифференциальным уравнением движения (3), покажите, что скорость материальной точки, записанная в комплексной форме, может быть вычислена по формуле

$$\dot{w} = i \sqrt{\frac{K}{p}} (\varepsilon + e^{i\nu}).$$

Опираясь на эту формулу, укажите способ построения годографа скорости.

5. Вектор скорости материальной точки, движущейся по эллиптической кеплеровской орбите, разложен на две составляющие, из которых одна направлена по нормали к радиусу-вектору, а вторая — перпендикулярно линии апсид. Покажите, что абсолютные величины этих составляющих не зависят от положения материальной точки на орбите.

6. Докажите справедливость теоремы:

Произведение модулей скоростей материальной точки, движущейся по кеплеровской эллиптической орбите, в двух точках, симметричных относительно центра эллипса, не зависит от выбора этих точек.

7. Найдите угловую скорость вращения радиуса-вектора, исходящего из фокуса эллиптической орбиты, не занятого притягивающим центром.

8. Материальная точка движется по эллиптической орбите в гравитационном поле неподвижного центра. Пусть r — радиус-вектор этой точки, исходящий из притягивающего центра A , ρ — вектор, начало которого помещено в движущейся точке, а конец — в «пустом» фокусе F . Докажите, что в каждый момент времени скорость точки направлена по биссектрисе угла между векторами r и ρ , а модуль скорости равен $\sqrt{r\rho} \dot{E}$, где E — эксцентрическая аномалия.

9. В небесной механике иногда возникает необходимость выразить одно переменное w явно через другое z из зависимости

$$\operatorname{tg} w = \lambda \operatorname{tg} z,$$

где λ — данное число и $0 < w < \pi$, $0 < z < \pi$. Если λ близко к единице, то непосредственное обращение к тригонометрическим таблицам оказывается недостаточно удовлетворительным. В подобных случаях пользуются рядом

$$w = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{k} \sin 2kz,$$

где

$$\mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Докажите справедливость этой формулы, опираясь на формулу Эйлера.

10. Переходя к вспомогательным комплексным переменным $\xi = e^{i\nu}$, $\eta = e^{iE}$ и полагая $\beta = \frac{1}{e} (1 - \sqrt{1 - e^2})$, установите следующие зависимости между истинной и эксцентрической аномалиями в задаче двух тел:

$$\nu = E + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin nE,$$

$$E = \nu + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^n}{n} \sin n\nu.$$

11. Пусть в качестве модели планеты принят сжатый эллипсоид с экваториальным радиусом a_n и полярным радиусом b_n . Пусть φ' и φ — соответственно планетоцентрическая и «планетодезическая» широты некоторой точки, лежащей на поверхности эллипсоида, f_n — сжатие, e_n — эксцентриситет меридионального сечения эллипсоида, $\lambda_n = e_n^2 (2 - e_n^2)$. Установите зависимость между величинами e_n и f_n . Выразите разность $\varphi - \varphi'$ через φ и λ_n и разложите ее в степенной ряд относительно λ_n . Пренебрегая членами, содержащими λ_n в степенях выше второй, получите приближенную формулу для вычисления разности $\varphi - \varphi'$ в случае Земли.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Балк М. Б., Элементы динамики космического полета, «Наука», 1965.
2. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, Физматгиз, 1963.
3. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968.
4. Мультон Ф. Р., Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935.
5. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 1, Гостехиздат, 1941.

Дополнительная

6. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», 1971.
7. Погорелов Д. А., Теория кеплеровых движений летательных аппаратов, Физматгиз, 1961.
8. Шарлье К., Небесная механика, пер. с нем., «Наука», 1966.
9. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», 1965.
10. Эскобал П., Методы определения орбит, пер. с англ., «Мир», 1970.

ГЛАВА V

ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ В НЕВОЗМУЩЕННОМ КЕПЛЕРОВСКОМ ДВИЖЕНИИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ

§ 1. Вычисление координат в невозмущенном кеплеровском движении

Справочные сведения

Элементы орбиты. Движение материальной точки по невозмущенной кеплеровской орбите будет однозначно определено, если будут заданы параметры, определяющие размеры и форму орбиты, плоскость, в которой располагается орбита, параметры, характеризующие ориентацию орбиты в этой плоскости, а также момент времени прохождения движущейся точки через определенную точку орбиты (или положение движущейся точки на орбите в заданный момент времени). Эти параметры называются *элементами орбиты*.

Элементы вводятся для некоторой системы координат, начало которой совпадает с притягивающим центром, а оси сохраняют неизменные направления в пространстве. За основную плоскость принимается обычно либо плоскость эклиптики определенной эпохи, либо плоскость земного экватора, а ось абсцисс направляют в точку весеннего равноденствия. При расчетах движения космических аппаратов часто выбираются планетоцентрические системы координат, основной плоскостью в которых служит плоскость экватора планеты.

Элементы орбиты, введенные для эклиптической системы координат, называются *эклиптическими элементами*. Если элементы отнесены к экваториальной системе координат, то они называются *экваториальными*.

Элементы орбиты вводятся следующим образом (рис. 5.1):

1. **Наклонение (наклон)** плоскости орбиты $S\xi\eta$ к основной координатной плоскости Sxy , обозначаемое обычно через i . Угол i берется в пределах от 0° до 180° . Наклонение принимает значения, меньшие 90° , если с положительного «конца» оси аппликат движение материальной точки по орбите видно как происходящее в прямом направлении (т. е. против часовой стрелки).

2. **Долгота восходящего узла**, обычно обозначаемая символом Ω , — угол между осью абсцисс x и линией узлов, т. е. линией пересечения плоскости орбиты с основной координатной плоскостью. Иначе говоря, долгота восходящего узла представляет собой долготу той точки небесной сферы, в которой пересекается радиус-вектор движущейся точки в момент, когда она переходит из области отрицательных аппликат z в область положительных аппликат. Этот угол заключается в пределах от 0° до 360° .

3. **Угловое расстояние перицентра от узла (аргумент перицентра)**, обозначаемое через ω , есть угол между линией узлов и линией апсид; иначе говоря, угол с вершиной в притягивающем центре между направлениями на восходящий узел и перицентр орбиты. Аргумент перицентра измеряется в пределах от 0° до 360° .

4. Большая полуось орбиты a .

5. Эксцентриситет орбиты e .

6. Момент τ прохождения движущейся точки через перигеицентр орбиты.

Приведенная система элементов орбиты—одна из возможных. Часто вместо момента прохождения через перигеицентр задают другой элемент—*среднюю аномалию* M_0 в эпоху t_0 (обычно t_0 —начальный момент времени), вместо большой полуоси пользуются фокальным параметром p и т. д.

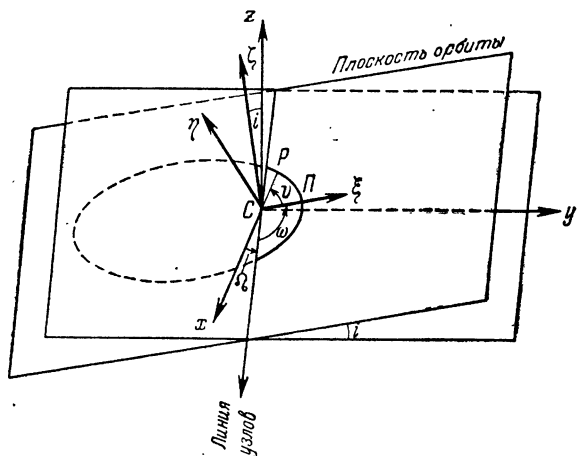


Рис. 5.1.

Вычисление прямоугольных координат кеплеровского движения. В случае эллиптической орбиты прямоугольные координаты спутника x, y, z в любой заданный момент t можно вычислить с помощью следующей матричной формулы:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} a (\cos E - e) + \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} b \sin E, \quad (1)$$

где E определяется из уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M,$$

а так называемые *проективные коэффициенты* P_x, P_y, \dots, Q_z задаются формулами

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i, \\ P_y &= \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i, \\ P_z &= \sin i \sin \omega, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i, \\ Q_z &= \sin i \cos \omega. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Переход от орбитальных координат ξ, η, ζ произвольной точки Q (необязательно лежащей в плоскости орбиты) к ее координатам x, y, z относительно

избранной «основной» системы координат можно осуществить с помощью матричной формулы:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad B = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В матрице B (матрица проективных коэффициентов)

$$R_x = \sin \varrho \sin i, \quad R_y = -\cos \varrho \sin i, \quad R_z = \cos i, \quad (5)$$

а числа P_x, \dots, Q_z задаются равенствами (2)–(3).

Л и т е р а т у р а: основная — [1]–[5], дополнительная — [8], [9].

ЗАДАЧИ

1. Известны элементы орбиты ИСЗ относительно геоцентрической экваториальной системы координат: $a = 7000$ км, $e = 0,2$, $i = 60^\circ$, $\varrho_L = 90^\circ$, $\omega = 45^\circ$. По этим данным вычислите декартовы экваториальные координаты перигея орбиты. Найдите затем экваториальные сферические координаты перигея r, δ, α .

2. Известны элементы орбиты спутника ϱ_L, i, ω относительно некоторой системы координат xuz с началом в притягивающем центре. Точка Q имеет относительно орбитальной системы координат $\xi\eta\zeta$ декартовы координаты $(0, 0, 1)$. Каковы ее координаты относительно системы отсчета xuz ?

3. Автоматическая межпланетная станция (АМС) в некоторый момент t_0 находилась на гелиоцентрическом расстоянии $r_0 = 3 \cdot 10^8$ км и имела истинную аномалию $\nu_0 = 45^\circ$. Известны следующие эклиптические элементы орбиты:

$$e = 0,7, \quad \varrho_L = 150^\circ, \quad \omega = 90^\circ, \quad i = 60^\circ.$$

Вычислите компоненты радиуса-вектора и вектора скорости АМС в указанный момент времени в эклиптической системе координат.

4. Космический корабль движется вокруг Солнца по эллиптической орбите, имеющей следующие эклиптические элементы: $a = 3$ а. е., $e = 0,4$, $i = 60^\circ$, $\varrho_L = 120^\circ$, $\omega = 90^\circ$, $\tau = 1971$, янв., $5,12^h 23^m$ UT.

Какими были в эклиптической системе отсчета прямоугольные координаты корабля за 30 суток перед его прохождением через перигелий?

5. Орбита искусственного спутника Земли имеет следующие экваториальные элементы: $a = 4R_3$ (R_3 — средний радиус Земли), $e = 0,3$, $i = 65^\circ$, $\varrho_L = 40^\circ$, $\omega = 50^\circ$, $\tau = 1974$, янв., $4,4^h 20^m$ UT. Найдите, какие прямоугольные координаты имел спутник в экваториальной системе отсчета в момент $t = 1974$, янв., $4,9^h 20^m$ UT.

6. Орбита искусственного спутника Земли имеет следующие экваториальные элементы: $a = 4R_3$, $i = 65^\circ$, $e = 0,2$, $\varrho_L = 60^\circ$, $\omega = 120^\circ$, $\tau = 1970$, июнь, $3,12^h 10^m$ UT. Вычислите, когда спутник в последний раз перед указанным моментом прошел через восходящий узел своей орбиты и когда он после этого момента впервые прошел через нисходящий узел.

§ 2. Определение элементов эллиптической орбиты по результатам наблюдений

Справочные сведения

Определение орбиты по трем положениям. Для вычисления элементов эллиптической орбиты достаточно знать положения*) движущейся точки, вообще говоря, для двух заданных моментов времени.

Вычисления значительно упрощаются, если известны три положения движущейся точки P_k ($k=1, 2, 3$) и момент прохождения через один из них. Пусть r_k — радиусы-векторы движущейся точки (рис. 5.2), t_k — момент прохождения движущейся точки через положение P_k ($t_1 < t_2 < t_3$).

Вычисление Ω и i . Элементы орбиты Ω и i можно найти из равенства

$$\frac{[r_1, r_2]}{|[r_1, r_2]|} = \sin \Omega \sin i \cdot I - \cos \Omega \sin i \cdot J + \cos i \cdot K, \quad (1)$$

где I, J, K — орты осей x, y, z соответственно.

Вычисление p и e . Для вычисления элементов p и e сначала полезно найти числа c_1 и c_3 из условия $r_2 = c_1 r_1 + c_3 r_3$: $[r_2, r_3] = c_1 [r_1, r_3]$, $[r_2, r_1] = c_3 [r_3, r_1]$. (2)

Затем можно найти p и e из формул

$$r_2 - p = c_1 (r_1 - p) + c_3 (r_3 - p), \quad (3)$$

$$e |[r_1, r_3]| = |(p - r_1) r_3 - (p - r_3) r_1|. \quad (4)$$

Вычисление ω . Пусть i, j, k — орты осей ξ, η, ζ орбитальной системы координат (ось ξ — линия аписид). Тогда

$$k = \frac{[r_1, r_3]}{|[r_1, r_3]|}, \quad j = \frac{(p - r_1) r_3 - (p - r_3) r_1}{e |[r_1, r_3]|}, \quad i = [j, k].$$

Если β — орт линии узлов, то $\beta = \cos \Omega \cdot I + \sin \Omega \cdot J$, $\cos \omega = \beta \cdot i$. (5)

Вычисление τ (момента прохождения движущейся точки через перигеум). Ограничимся случаем $e < 1$. Пусть известно t_2 . Сначала находим $a = p/(1 - e^2)$, $b = p^2/a$ и $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}$. Далее вычисляем значение E_2 из системы уравнений

$$a (\cos E_2 - e) = r_2 \cdot i, \quad b \sin E_2 = r_2 \cdot j. \quad (6)$$

Элемент τ находим из уравнения Кеплера

$$E_2 - e \sin E_2 = n (t_2 - \tau). \quad (7)$$

Определение элементов орбиты по начальным условиям. Если известны радиус-вектор r_1 и скорость движущейся точки V_1

*) В этом параграфе положение движущейся точки будет определяться относительно системы координат с началом в притягивающем центре и с фиксированными направлениями координатных осей. Положение движущейся точки будем задавать радиусом-вектором с началом в притягивающем центре.

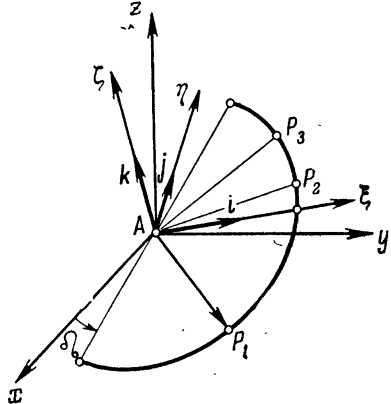


Рис. 5.2.

в заданный момент времени t_1 , то элементы орбиты можно вычислить следующим образом. Сначала находим орт нормали к орбите:

$$k = \frac{[r_1, V_1]}{|[r_1, V_1]|}. \quad (8)$$

Элементы $\delta \mathcal{L}$ и i вычисляются из равенства

$$k = \sin \delta \mathcal{L} \sin i \cdot I - \cos \delta \mathcal{L} \sin i \cdot J + \cos i \cdot K.$$

Затем находим последовательно

$$\sigma = |[r_1, V_1]|, \quad p = \frac{\sigma^2}{K}, \quad h = V_1^2 - \frac{2K}{r_1}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{h\sigma^2}{K^2}}. \quad (9)$$

Пусть, далее, V_{1r} и V_{1p} — радиальная и трансверсальная компоненты скорости, v_1 — значение истинной аномалии в момент t_1 . Тогда v_1 можно найти из равенств

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos v_1}, \quad \frac{\sigma}{p} e \sin v_1 = V_{1r} = V_1 \cdot \frac{r_1}{r_1}. \quad (10)$$

Если β — орт линии узлов, то

$$\frac{\beta \cdot r_1}{r_1} = \cos(\omega + v_1), \quad \frac{1}{r_1} [\beta, r_1] = \sin(\omega + v_1) \cdot K. \quad (11)$$

Отсюда находим $\omega + v_1$, а затем и ω .

Для вычисления τ имеем в случае эллиптического движения

$$\operatorname{tg} \frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}. \quad (12)$$

Момент τ определяем из уравнения Кеплера

$$E_1 - e \sin E_1 = n(t_1 - \tau). \quad (13)$$

Метод Гаусса. Пусть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты движущейся точки в заданные моменты времени t_1 и t_2 ($t_1 < t_2$). Известно, кроме того, что истинные аномалии для указанных моментов отличаются друг от друга менее чем на 90° .

Для разыскания элементов орбиты методом Гаусса можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Вводим в рассмотрение радиусы-векторы

$$r_s = x_s i + y_s j + z_s k \quad (s=1, 2), \quad (14)$$

где i, j, k — орты координатных осей x, y, z .

Вычисляем модули этих векторов

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2} \quad (s=1, 2). \quad (15)$$

2. Вычисляем векторное произведение

$$[r_1, r_2] = R_x i + R_y j + R_z k. \quad (16)$$

Находим наклонение орбиты из зависимости

$$|[r_1, r_2]| \cos i = R_z. \quad (17)$$

3. Вводим обозначение

$$2f = v_2 - v_1 \quad (18)$$

и находим угол f из зависимости

$$\sin 2f = \frac{|[r_1, r_2]|}{(r_1, r_2)} \operatorname{sign} R_z. \quad (19)$$

4. Вычисляем вспомогательные постоянные

$$t^* = \sqrt{K} (t_2 - t_1), \quad (20)$$

$$\chi^2 = 2 [r_1 r_2 + (r_1, r_2)], \quad (21)$$

$$m = \frac{t^{*2}}{\chi^3}, \quad (22)$$

$$l = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1 + r_2}{\chi} - 1 \right). \quad (23)$$

5. Записываем вспомогательные функции

$$x = \frac{m}{\eta^2} - l, \quad (24)$$

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n+4)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+3)} x^n, \quad (25)$$

или

$$X(x) = 4(1 + \zeta) \left(\frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{\zeta}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\zeta^2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right), \quad (26)$$

где

$$\zeta = \frac{x}{1-x}, \quad (27)$$

$$\eta = 1 + X(l+x). \quad (28)$$

Геометрический смысл величины η — отношение площади криволинейного сектора, ограниченного фокальными радиусами-векторами заданных положений движущейся точки и соответствующей дугой орбиты, к площади треугольника, ограниченного указанными радиусами-векторами и хордой, стягивающей дугу орбиты.

6. Вычисляем η с помощью метода итераций. В качестве нулевого приближения η_0 можно принять единицу. После получения приближения η_n ($n=0, 1, 2, \dots$) вычисляем

$$x_n = \frac{m}{\eta_n^2} - l, \quad (29)$$

$$\zeta_n = \frac{x_n}{1-x_n}, \quad (30)$$

$$X_n = X(x_n), \quad (31)$$

$$\eta_{n+1} = 1 + X_n(l+x_n). \quad (32)$$

Вычисления продолжаем до тех пор, пока η_{n+1} не совпадет с заданной точностью с η_n *).

*) Вычисления X_n можно также выполнять следующим образом. С функцией $X(x)$ связана вспомогательная функция $\xi(x)$ с помощью соотношения

$$X(x) = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5} [x - \xi(x)]},$$

а для вспомогательной функции $\xi(x)$ составлены весьма удобные таблицы (см. [8]).

7. Вычисляем большую полуось или фокальный параметр орбиты

$$a = \frac{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} (1 - 2x) \cos f}{8x(1-x)}, \quad (33)$$

$$p = \left(\frac{\eta | [r_1, r_2] |}{f^*} \right)^2. \quad (34)$$

8. Из уравнений

$$e \cos v_s = \frac{p}{r_s} - 1 \quad (s = 1, 2), \quad (35)$$

$$v_2 - v_1 = 2f \quad (36)$$

находим e , v_1 , v_2 , а затем с помощью уравнения Кеплера средние аномалии M_1 и M_2 , среднее движение n и момент τ прохождения через перигентр.

9. Для нахождения элемента Ω можно воспользоваться зависимостями

$$| [r_1, r_2] | \sin i \sin \Omega = R_x, \quad (37)$$

$$| [r_1, r_2] | \sin i \cos \Omega = R_y. \quad (38)$$

10. Для вычисления аргумента перигентра ω находим сначала величину $u_1 = \omega + v_1$ из зависимостей

$$x_1 = r_1 (\cos u_1 \cos \Omega - \sin u_1 \sin \Omega \cos i), \quad (39)$$

$$y_1 = r_1 (\cos u_1 \sin \Omega + \sin u_1 \cos \Omega \cos i), \quad (40)$$

$$z_1 = r_1 \sin u_1 \sin i. \quad (41)$$

Метод Гаусса целесообразно применять, если $|v_1 - v_2| < 70^\circ$. В противном случае применяются другие итерационные методы (подробнее см. в [6]). Метод Гаусса применим и в случае гиперболической орбиты.

Л и т е р а т у р а: основная — [1], [2], [4] — [6], дополнительная — [7] — [9].

ЗАДАЧИ

1. Космический корабль движется по гелиоцентрической орбите. В тот момент, когда истинная аномалия корабля составляла 120° , он имел следующие прямоугольные эллиптические координаты:

$$x_1 = 3 \text{ а. е.}, \quad y_1 = -4 \text{ а. е.}, \quad z_1 = 12 \text{ а. е.}$$

Через некоторое время корабль прошел через точку с эллиптическими координатами

$$x_2 = -2 \text{ а. е.}, \quad y_2 = \frac{8}{3} \text{ а. е.}, \quad z_2 = -8 \text{ а. е.}$$

Вычислите те элементы орбиты, которые определяются приведенными данными. Объясните, почему остальные элементы орбиты невозможно найти по условию задачи.

2. Искусственный спутник Земли наблюдался над пунктом P_1 (в зените) с географическими координатами $\varphi_1 = 30^\circ$, $\lambda_1 = 90^\circ$. А через 6^h он оказался над пунктом P_2 с географическими координатами $\varphi_2 = 60^\circ$, $\lambda_2 = 180^\circ$. Полет совершается в таких условиях, что допустимо учитывать только тяготение к Земле и считать, что Земля имеет сферическую структуру. Вычислить наклонение орбиты к плоскости земного экватора.

3. В 12^{h} по московскому времени 1 апреля 1980 г. на одной из станций наблюдался ИСЗ. Были измерены его горизонтальные сферические координаты ρ , h , A и по этим данным вычислены его экваториальные декартовы координаты. Они оказались равными (d, d, d) , где $d = 20\,000$ км. Аналогичные наблюдения за тем же спутником были выполнены на двух других станциях: на одной — утром того же дня, на другой — вечером. Экваториальные геоцентрические координаты оказались такими: $(2d, d, 0)$ и $(-d, 0, d)$. Звездное время в Гринвиче в полночь на 1 апреля составляло $12^{\text{h}}33^{\text{m}}21^{\text{s}},6$. Вычислите элементы орбиты спутника.

4. Известен гравитационный параметр притягивающего центра K , а относительно орбиты спутника известна векторная константа площадей σ и вектор Лапласа λ . Вычислите a , e , \mathcal{J}_2 , i , ω .

5. Пользуясь решением задачи 4, укажите способ для вычисления элементов орбиты спутника, если в один какой-либо момент времени t_1 известны его радиус-вектор r_1 и вектор скорости V_1 .

6. Космический корабль совершает перелет в межпланетном пространстве и притом на таких больших расстояниях от планет, что допустимо учитывать лишь тяготение к Солнцу S . Штурман корабля намерен узнать эксцентриситет и большую полуось орбиты.

Пусть движение рассматривается в правой системе координат, в которой за основную плоскость xu принята плоскость эклиптики, ось абсцисс совпадает с прямой SR «Солнце—Регул» *). На основании ранее проведенных наблюдений штурман нашел для трех моментов времени сферические координаты корабля относительно указанной системы отсчета:

Момент времени	Гелиоцентрическое расстояние корабля, км	Долгота	Широта
$t_1 = 1980$, окт., 10, $12^{\text{h}}00^{\text{m}}\text{UT}$	$r_1 = 2,15 \cdot 10^8$	$\lambda_1 = 272^\circ$	$\varphi_1 = 0$
$t_2 = 1980$, нояб., 29, $12^{\text{h}}00^{\text{m}}\text{UT}$	$r_2 = 1,86 \cdot 10^8$	$\lambda_2 = 289^\circ$	$\varphi_2 = 0$
$t_3 = 1980$, дек., 28, $12^{\text{h}}00^{\text{m}}\text{UT}$	$r_3 = 1,47 \cdot 10^8$	$\lambda_3 = 303^\circ$	$\varphi_3 = 0$

Какими должны быть для данной орбиты элементы a и e ?

7. В момент $t_1 = 1971$, май, $1,12^{\text{h}}00^{\text{m}}\text{ UT}$ радиус-вектор r_1 спутника Земли и вектор его скорости V_1 имели следующие компоненты в прямоугольной экваториальной геоцентрической системе координат: $x = 4R_3$, $y = 3R_3$, $z = 0$ (R_3 — средний радиус Земли),

*) При той точности, которая требуется при решении данной задачи, допустимо считать, что Регул лежит в плоскости эклиптики.

$V_x = 1$ км/сек, $V_y = \frac{4}{3}$ км/сек, $V_z = 4$ км/сек. Вычислите элементы орбиты спутника. Какими были его радиус-вектор и вектор скорости 3 мая 1971 г. в $12^{\text{h}}00^{\text{m}}$ UT?

8. После запуска ИСЗ отсечка двигателя произошла в момент $t_0 = 1962$, июль, $10,22^{\text{h}}45^{\text{m}}$ UT над пунктом P с географическими координатами $\lambda = -70^\circ$, $\varphi = 20^\circ$. Высота H спутника над поверхностью Земли (имеется в виду шаровая модель Земли) в этот момент составляла 370 км, скорость V_0 была равна 8 км/сек, вектор скорости составлял с местной нормалью угол $\beta = 87^\circ$, азимут направления движения спутника равнялся 250° . Вычислите элементы орбиты спутника. Звездное время в гринвичскую полночь 1 января 1962 г. составляло $6^{\text{h}}36^{\text{m}}43^{\text{s}},06$.

9. Непосредственно после запуска одного из спутников «Авангард» станция наблюдения за спутниками получила для предварительного грубого определения его орбиты следующую информацию:

Место запуска: мыс Кеннеди; время запуска: 1959 , фев., $17,15^{\text{h}}55^{\text{m}}$ UT; азимут направления запуска: около $287^\circ,5$.

Можно считать, что активный участок орбиты закончился через 6^{m} после запуска и что в этот момент спутник находился в своем перигее над пунктом с географическими координатами ($\varphi = 21^\circ$, $\lambda = -71^\circ$) на высоте $H = 540$ км над поверхностью Земли (имеется в виду шаровая модель Земли).

Период обращения (на первом витке) — около 126^{m} , наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора — около 34° .

На основании этих данных вычислите неизвестные элементы орбиты.

10. Комета, движущаяся по параболической орбите, прошла 1 сент. в $3^{\text{h}}00^{\text{m}}$ UT через точку S_1 с прямоугольными эклиптическими гелиоцентрическими координатами

$$x_1 = 0,3 \text{ а. е.}, \quad y_1 = 0,4 \text{ а. е.}, \quad z_1 = 1,2 \text{ а. е.},$$

а через некоторое время — через точку S_2 с координатами

$$x_2 = 0, \quad y_2 = -0,3 \text{ а. е.}, \quad z_2 = -0,4 \text{ а. е.}$$

Вычислите элементы орбиты кометы.

11. Спутник Земли 4 июля 1964 г. в моменты t_1 и t_2 прошел через точки S_1 и S_2 , имеющие следующие прямоугольные координаты (за единицу длины принят средний радиус Земли):

$$x_1 = 2,78 \ 418, \quad y_1 = 0,82 \ 815, \quad z_1 = 0,75 \ 000,$$

$$x_2 = 2,37 \ 280, \quad y_2 = 1,54 \ 778, \quad z_2 = 1,11 \ 792.$$

Известно, что $t_2 - t_1 = 0,14 \ 971 \ 172$ JD. По этим данным вычислите у же нашел фокальный параметр орбиты $p = 4,5$.

Вычислите векторные элементы орбиты

$$P = P_x i + P_y j + P_z k, \quad Q = Q_x i + Q_y j + Q_z k,$$

где i, j, k — орты осей прямоугольной экваториальной системы координат. Затем вычислите классические элементы орбиты.

12. Необходимо найти экваториальные элементы орбиты ИСЗ. Известно, что спутник прошел 1 июня 1964 г. через две точки S_1 и S_2 со следующими прямоугольными экваториальными координатами (за единицу длины принят средний радиус Земли):

$$\begin{aligned} x_1 &= -1,75\ 981, & y_1 &= 1,68\ 113, & z_1 &= 1,16\ 913, \\ x_2 &= -2,23\ 077, & y_2 &= 0,77\ 454, & z_2 &= 1,34\ 609. \end{aligned}$$

Время между моментами t_1 и t_2 прохождения спутника через эти точки составляло $t_2 - t_1 = 0,01527809$ JD.

13. Космический аппарат имел следующие прямоугольные экваториальные координаты (в качестве единицы длины принят средний радиус Земли):

в момент $t_1 = 1980$, июль, $5,10^{\text{h}}0^{\text{m}}\text{UT}$

$$x_1 = 0,6, \quad y_1 = -2,0, \quad z_1 = 0,8,$$

а в момент $t_2 = t_1 + 10^{\text{m}}$

$$x_2 = 1,4, \quad y_2 = -1,1, \quad z_2 = 1,0.$$

Найдите вектор скорости в момент t_1 . Вычислите элементы орбиты космического аппарата.

14. Астрономическая обсерватория в Лоредо (США) имеет следующие географические координаты: $\lambda = -8^{\text{h}}37^{\text{m}}32^{\text{s}},26$, $\varphi = 27^{\circ}37'8'',76$. Высота обсерватории над уровнем моря равна 640 м. Сжатие земного сфероида принять равным $1/298,3$.

В результате наблюдений над спутником, проведенных на этой обсерватории, трижды были найдены его топоцентрические горизонтальные координаты:

Момент наблюдения, UT	A	h	ρ , км
1960, июнь, 11, $17^{\text{h}}37^{\text{m}}31^{\text{s}},7$	$227^{\circ}47'0'',0$	$20^{\circ}01'0'',0$	$1447',75$
1960, июнь, 11, $17^{\text{h}}40^{\text{m}}31^{\text{s}},7$	$298^{\circ}21'0'',0$	$70^{\circ}17'0'',0$	$679',87$
1960, июнь, 11, $17^{\text{h}}43^{\text{m}}31^{\text{s}},7$	$29^{\circ}34'0'',0$	$22^{\circ}31'0'',0$	$1411',18$

По этим данным вычислите элементы орбиты спутника 11 июня 1960 г. относительно экваториальной системы координат.

15. С искусственного спутника Земли ведутся наблюдения за космическим аппаратом С. В два момента времени $t_1 = 4^{\text{h}}30^{\text{m}}\text{UT}$ и $t_2 = 4^{\text{h}}35^{\text{m}}\text{UT}$ были найдены прямоугольные геоцентрические

экваториальные координаты ИСЗ. Они оказались следующими (за единицу длины принят средний радиус Земли):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,150, & y_1 &= 1,000, & z_1 &= 0,502, \\ x_2 &= 0,180, & y_2 &= 0,912, & z_2 &= 0,765. \end{aligned}$$

В эти же моменты времени координаты аппарата С относительно прямоугольной экваториальной системы координат с началом в центре масс ИСЗ были

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0,025, & \bar{y}_1 &= 0,024, & \bar{z}_1 &= 0,098, \\ \bar{x}_2 &= 0,023, & \bar{y}_2 &= 0,012, & \bar{z}_2 &= 0,014. \end{aligned}$$

Вычислите экваториальные элементы орбиты аппарата.

§ 3. Трасса спутника на поверхности планеты

Справочные сведения

В данном параграфе будем считать, что планета имеет шаровую форму. *Подспутниковой точкой* называют ортогональную проекцию спутника на поверхность планеты. Когда спутник описывает свою траекторию в пространстве, его подспутниковая точка опишет некоторую линию на поверхности планеты. Эту линию называют *трассой спутника на поверхности планеты*.

Л и т е р а т у р а: основная — [2], [6], дополнительная — [9].

ЗАДАЧИ

1. Орбита советского ИСЗ «Космос-4», запущенного в апреле 1962 г., была близка к окружности ($H_a = 330$ км, $H_p = 298$ км). Ради простоты примем, что эта орбита была окружностью и что «Космос-4» двигался вокруг Земли на высоте 314 км. По сообщению ТАСС плоскость орбиты спутника была наклонена к плоскости земного экватора под углом $i = 65^\circ 00'$. Под каким углом трасса пересекала земной экватор?

2. Спутник обращается вокруг Земли по окружности на высоте 230 км над поверхностью Земли. Орбита спутника проходит над обоими полюсами (полярный спутник). Под каким углом пересекает трасса спутника экватор Земли?

3. Орбита первого советского спутника была наклонена к плоскости земного экватора под углом $i = 65^\circ$. Спутник прошел над головой наблюдателя, находящегося на экваторе, в направлении с юго-запада на северо-восток. В этот момент наблюдатель измерил видимый угол между трассой спутника и направлением на восток. Чему должен был оказаться равным этот угол? Решите аналогичную задачу, когда трасса спутника пересекает экватор Земли с северо-запада на юго-восток. Данные о спутнике: $H_a = 950$ км, $H_p = 230$ км, $\omega = 58^\circ$.

4. Спутник Луны движется по круговой орбите, наклоненной к плоскости лунного экватора под углом $i = 30^\circ$. Долгота восходящего

узла орбиты $\varrho = 60^\circ$. Радиус орбиты — 1850 км. Луна совершает один полный оборот вокруг своей оси за 27,3 суток. Найдите уравнение трассы спутника, т. е. зависимость между селенографической долготой подспутниковой точки и ее широтой.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», 1971.
2. Балк М. Б., Элементы динамики космического полета, «Наука», 1965.
3. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968.
4. Мультон Ф. Р., Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935.
5. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 1, Гостехиздат, 1941.
6. Эскобал П., Методы определения орбит, пер. с англ., «Мир», 1970.

Дополнительная

7. Дубяго А. Д., Определение орбит, Гостехиздат, 1949.
8. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
9. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», 1965.

ГЛАВА VI

МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

§ 1. Уравнения Лагранжа, Рауса и Гамильтона

Справочные сведения

Уравнения Лагранжа. Рассмотрим механическую систему из k материальных точек, на которые наложены s идеальных голономных удерживающих связей, так что число степеней свободы равно $n = 3k - s$. Обозначим массы и радиусы-векторы точек в инерциальной системе координат соответственно через m_i и $r_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Пусть F_i — равнодействующая активных сил, приложенных к i -й точке системы.

Для описания движения системы воспользуемся *лагранжевыми координатами* q_1, q_2, \dots, q_n , однозначно связанными с радиусами-векторами соотношениями

$$r_i = r_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (1)$$

для которых ранг якобиевой матрицы равен

$$\text{rang} \frac{\partial (r_1, r_2, \dots, r_k)}{\partial (q_1, q_2, \dots, q_n)} = n.$$

Уравнения Лагранжа второго рода записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

В них \dot{q}_i — обобщенные скорости, T — живая сила, Q_i — обобщенные силы. Обобщенная сила определяется формулой

$$Q_i = \sum_{j=1}^k F_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

а для живой силы имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k m_j \dot{r}_j^2 = T_2 + T_1 + T_0, \quad (4)$$

где T_2, T_1, T_0 — однородные формы относительно обобщенных скоростей соответственно второй, первой и нулевой степеней.

Если силы допускают силовую функцию U , то

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

и уравнения Лагранжа принимают форму

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

причем лагранжиан L равен

$$L = T + U. \quad (7)$$

Свободная материальная точка. Рассмотрим движение свободной материальной точки массы m , к которой приложена активная сила F , принимаемая в качестве лагранжевых координат криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 , связанные с декартовыми прямоугольными координатами с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3), \\ y &= y(q_1, q_2, q_3), \\ z &= z(q_1, q_2, q_3). \end{aligned}$$

Введем коэффициенты Ламе

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Тогда живая сила запишется следующим образом:

$$T = \frac{m}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2), \quad (9)$$

и уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt} (m H_i^2 \dot{q}_i) - \sum_{j=1}^3 m \dot{q}_j^2 H_j \frac{\partial H_j}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Первые интегралы уравнений Лагранжа. Если активные силы потенциальны, причем $\partial L / \partial t \equiv 0$, то уравнения движения допускают интеграл Якоби

$$T_2 - T_0 = U + h. \quad (11)$$

Если для какой-либо координаты $\partial L / \partial q_i \equiv 0$, то эта координата называется *циклической* и ей соответствует *циклический интеграл*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \beta_i. \quad (12)$$

Уравнения Рауса. Перейдем от обобщенных скоростей \dot{q}_i ($i = l+1, \dots, n$) к новым переменным, каноническим импульсам p_i , определяемым из соотношений

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = l+1, \dots, n). \quad (13)$$

В результате приходим к уравнениям Рауса

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l), \\ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial R}{\partial q_i} \quad (i = l+1, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где функция Рауса R находится по формуле

$$R = \sum_{i=l+1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (15)$$

Игнорирование циклических координат. Если переход к каноническим импульсам выполнен только для циклических координат, то достаточно рассматривать только первую подгруппу уравнений Рауса, причем в функции Рауса значение импульсов надлежит заменить постоянными из циклических интегралов.

Уравнения Гамильтона. В результате преобразования всех обобщенных скоростей к каноническим импульсам получаются *уравнения Гамильтона*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (16)$$

в которых

$$H = T_2 - T_0 - U \quad (17)$$

— *функция Гамильтона (гамильтониан).*

Если $\partial H / \partial t \equiv 0$, то уравнения Гамильтона допускают *интеграл Якоби*

$$H = h. \quad (18)$$

При этом, если $H = T - U$, то интеграл Якоби совпадает с *интегралом живых сил*

$$T - U = h. \quad (19)$$

При наличии циклических координат, для которых $\partial H / \partial q_i \equiv 0$, уравнения Гамильтона обладают *циклическим интегралом*

$$p_i = \text{const}. \quad (20)$$

Литература: основная — [1], [2], [4], дополнительная — [8].

ЗАДАЧИ

1. Звезда движется в однородной сфероидальной галактике, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг оси ее симметрии. Пользуясь методом Лагранжа и принимая в качестве лагранжевых координат прямоугольные координаты в системе осей, жестко связанных с галактикой, напишите дифференциальные уравнения движения и найдите их общее решение.

2. В селеноцентрической системе координат, оси которой направлены по главным центральным осям инерции Луны, гравитационный потенциал Луны приближенно можно принять равным

$$U = \frac{K}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{mr^5} [(B + C - 2A)x^2 + (A + C - 2B)y^2 + (A + B - 2C)z^2] \right\},$$

где K , m — соответственно гравитационный параметр и масса Луны, A , B , C — ее главные центральные моменты инерции, соответствующие осям x , y , z , r — селеноцентрический радиус-вектор. Считая, что Луна вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью n , напишите канонические уравнения Гамильтона, определяющие движение лунного спутника и найдите первые интегралы.

3. Гравитационный потенциал слабо сжатой осесимметричной планеты с точностью до второй зональной гармоники может быть принят равным

$$U = \frac{K}{r} + \frac{Kc \sin^2 \varphi}{r^2},$$

где K — гравитационный параметр планеты, c — расстояние шаровой точки инерции от центра масс планеты, r — радиус-вектор спутника с началом в шаровой точке, φ — широта спутника, отсчитываемая от плоскости, параллельной экватору планеты и проходящей через шаровую точку. Составьте дифференциальные уравнения движения спутника в сферической системе координат (с полюсом в шаровой точке) и найдите первые интегралы задачи.

4. Считая Землю осесимметричной, покажите, что геоцентрическая долгота спутника является циклической координатой. Игнорируя эту циклическую координату, запишите дифференциальные уравнения движения спутника в форме Рауса.

5. Рассматривая плоское движение пассивно гравитирующей точки в поле тяготения двух неподвижных центров с гравитационными параметрами K и K' , Л. Эйлер принял в качестве координат углы φ и ω , которые образуют радиусы-векторы движущейся точки, исходящие из притягивающих центров, с прямой, проходящей через притягивающие центры. Составьте дифференциальные уравнения Лагранжа для этой задачи, принимая в качестве лагранжевых координат введенные Эйлером углы.

6. В своей теории возмущенного движения небесных тел Ганзен ввел «идеальные» координаты с помощью линейного ортогонального собственного преобразования абсолютных координат ξ , η , ζ к новым координатам

$$x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta,$$

$$y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta,$$

$$z = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta,$$

в котором α_i , β_i , γ_i , \dots , α_3 , β_3 , γ_3 — функции времени, подчиненные условиям:

$$\xi \dot{\alpha}_1 + \eta \dot{\alpha}_2 + \zeta \dot{\alpha}_3 = 0,$$

$$\xi \dot{\beta}_1 + \eta \dot{\beta}_2 + \zeta \dot{\beta}_3 = 0,$$

$$\xi \dot{\gamma}_1 + \eta \dot{\gamma}_2 + \zeta \dot{\gamma}_3 = 0.$$

Покажите, что уравнения движения материальной точки в идеальных координатах имеют такой же вид, как и в абсолютных.

7. Американский небесный механик В. Себехей при исследовании устойчивости движения звезд в сфероидальных галактиках воспользовался аппроксимирующим выражением для гравитационного потенциала

галактики вида

$$U = \frac{ce^{a\varphi}}{r^n},$$

где r — радиус-вектор с началом в центре галактики, φ — полярный угол, а a , c , n — некоторые постоянные.

Составьте канонические дифференциальные уравнения движения звезды в указанном гравитационном поле. Покажите, что эти уравнения в качестве частных решений допускают спиральные движения звезды.

8. В теории движения Луны Хилла — Брауна исходные уравнения движения Луны в геоцентрической равномерно вращающейся системе координат ξ , η , ось абсцисс ξ которой постоянно направлена на Солнце, записываются в виде

$$\ddot{\xi} = 2\dot{\eta} + 3\xi - \frac{\xi}{\rho^3},$$

$$\ddot{\eta} = -2\dot{\xi} - \frac{\eta}{\rho^3}.$$

Профессор МГУ Н. Д. Моисеев преобразовал их к параболическим координатам p_1 , p_2 , связанным с прямоугольными, при помощи формул

$$\eta^2 = 2p_1^2 \left(\xi + \frac{1}{2} p_1^2 \right),$$

$$\eta^2 = 2p_2^2 \left(\frac{1}{2} p_2^2 - \xi \right)$$

и новой независимой переменной τ , связанной со временем t соотношением

$$\tau = \int \frac{dt}{p_1^2 + p_2^2}.$$

Преобразуйте дифференциальные уравнения движения к параболическим координатам. Найдите первые интегралы задачи.

9. Преобразуйте дифференциальные уравнения движения в параболических координатах, полученные в предыдущей задаче, к канонической форме.

§ 2. Канонические преобразования. Теорема Якоби

Справочные сведения

Канонические преобразования. Рассмотрим $2n$ -мерное фазовое пространство канонических переменных q_i и p_i ($i=1, 2, \dots, n$). Выполним преобразование от старых переменных q_i , p_i к новым переменным ξ_i , η_i ($i=1, 2, \dots, n$). Это преобразование называется *каноническим* или *контактным*, если оно любую гамильтонову систему переводит снова в гамильтонову, вообще говоря, с другой функцией Гамильтона,

Каноническое преобразование можно всегда задать с помощью произвольной функции. Пусть

$$\Psi(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

— произвольная функция времени, старых лагранжевых координат q_i и новых переменных ξ_i . Введем новые переменные ξ_i и η_i ($i=1, 2, \dots, n$) при помощи формул преобразования вида

$$p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial q_i}, \quad \eta_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Тогда каноническая система уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

в новых переменных примет вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \xi_i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где новая гамильтонова функция определяется формулой

$$K = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (4)$$

Уравнение Гамильтона — Якоби. Задача интегрирования гамильтоновой системы уравнений может быть сведена к задаче построения полного интеграла нелинейного уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0, \quad (5)$$

называемого *уравнением Гамильтона—Якоби*.

Для случая, когда функция Гамильтона не зависит явно от времени, полагая $V = -ht + W$, где h — постоянная энергии, уравнение (5) приводим к виду

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0. \quad (6)$$

Теорема Якоби. Если $V = V(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ есть полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, то общий интеграл гамильтоновой системы уравнений дается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где α_i, β_i суть новые произвольные постоянные.

Случай интегрируемости Штеккеля. Пусть даны $n(n+1)$ произвольных функций $\Phi_{ij}(q_i)$ и $U_i(q_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$), для которых определитель $\Delta = \det |\Phi_{ij}|$ не равен тождественно нулю. Тогда если живая сила и силовая функция определяются формулами

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{q}_i^2}{A_i}, \quad U = \sum_{i=1}^n A_i U_i, \quad (8)$$

причем

$$A_i = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \Phi_{ii}} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

то уравнение Гамильтона—Якоби интегрируется в квадратурах и полный интеграл этого уравнения имеет вид

$$V = -ht + \sum_{i=1}^n \int \sqrt{2U_i + 2h\varphi_{i1} + \sum_{j=2}^n \alpha_j \varphi_{ij}} dq_i, \quad (10)$$

где $h, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ —произвольные постоянные, а h —постоянная энергии.
Л и т е р а т у р а: основная—[2], [4], дополнительная—[8].

ЗАДАЧИ

1. Звезда движется в однородной сфероидальной галактике. Найдите траекторию и закон ее движения, построив полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби.

2. Воспользуйтесь теоремой Якоби и найдите уравнение орбиты точки, движущейся в центральном поле с силовой функцией $U = \frac{K}{r}$. В качестве лагранжевых координат возьмите параболические координаты.

3. Докажите теорему профессора МГУ Н. Д. Моисеева:
Пусть живая сила определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \Phi \sum_{i=1}^n (A_i \dot{q}_i^2 + 2B_i \dot{q}_i + C_i),$$

в которой каждый из коэффициентов A_i является функцией только одной переменной q_i , а коэффициенты B_i и C_i даются формулами

$$B_i = \frac{b_i(q_i)}{\Phi}, \quad C_i = \frac{c_i(q_i)}{\Phi^2} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

причем

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \varphi_i(q_i),$$

и пусть силовая функция U имеет вид

$$U = \frac{1}{\Phi} \sum_{i=1}^n U_i(q_i).$$

Тогда уравнение Гамильтона—Якоби интегрируется в квадратурах.

4. Материальная точка движется в центральном поле сил (вообще говоря, не ньютоновском!) в заданной плоскости. Вводя в этой плоскости полярную систему координат r, φ с полюсом в центре сил, напишите в этих координатах уравнение Гамильтона—Якоби и построьте его полный интеграл, воспользовавшись теоремой Штекеля.

5. В системе сжатых сфероидальных координат, связанных с декартовыми координатами формулами

$$x = c \operatorname{ch} \psi \cos \vartheta \cos \lambda,$$

$$y = c \operatorname{ch} \psi \cos \vartheta \sin \lambda,$$

$$z = c \operatorname{sh} \psi \sin \vartheta,$$

рассмотрите движение материальной точки в силовом поле, силовая функция которого имеет вид

$$U = \frac{\Phi_1(\psi) + \Phi_2(\vartheta)}{\operatorname{ch}^2 \psi - \cos^2 \vartheta}.$$

Запишите уравнение Гамильтона — Якоби в сжатых сфероидальных координатах и постройте его полный интеграл, воспользовавшись теоремой Штеккеля.

6. Покажите, что, используя полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, полученный в предыдущей задаче, можно найти общее решение задачи двух тел.

7. Покажите с помощью теоремы Якоби, что задача о движении материальной точки в силовом поле с силовой функцией

$$U = \frac{\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta)}{\xi^2 + \eta^2},$$

где ξ , η , φ — параболоидальные координаты, связанные с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2),$$

$$y = \xi \eta \cos \varphi,$$

$$z = \xi \eta \sin \varphi,$$

приводится к квадратурам.

8. Известно, что элементы эллиптической орбиты, введенные Ш. Делоне,

$$L = \sqrt{Ka}, \quad l = n(t - T),$$

$$G = \sqrt{Ka(1 - e^2)}, \quad g = \omega,$$

$$H = \sqrt{Ka(1 - e^2)} \cos i, \quad h = \delta_{\mathcal{L}},$$

где a , e , i , ω , $\delta_{\mathcal{L}}$, n , T — классические элементы задачи двух тел, а K — гравитационный параметр притягивающего тела, являются каноническими переменными. Покажите, что преобразование к элементам орбиты

$$\xi_1 = \sqrt{Ka} (1 - \sqrt{1 - e^2}), \quad \eta_1 = n(t - T),$$

$$\xi_2 = \sqrt{Ka(1 - e^2)} (1 - \cos i), \quad \eta_2 = n(t - T) + \omega,$$

$$\xi_3 = \sqrt{Ka(1 - e^2)} \cos i, \quad \eta_3 = n(t - T) + \omega + \delta_{\mathcal{L}}$$

будет каноническим.

9. Канонические переменные $\xi_i, \eta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ преобразуются к новым переменным $\xi'_i, \eta'_i (i = 1, 2, \dots, n)$ при помощи линейной подстановки:

$$\begin{aligned}\eta_i &= a_{1i}\eta'_1 + a_{2i}\eta'_2 + \dots + a_{ni}\eta'_n \\ \xi_i &= a_{i1}\xi'_1 + a_{i2}\xi'_2 + \dots + a_{in}\xi'_n\end{aligned}$$

Покажите, что это преобразование будет каноническим. Докажите, что канонические элементы Пуанкаре

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sqrt{Ka}, & \eta_1 &= n(t-T) + \omega + \delta\mathcal{L}, \\ \xi_2 &= \sqrt{Ka}(1 - \sqrt{1-e^2}), & \eta_2 &= -(\omega + \delta\mathcal{L}), \\ \xi_3 &= \sqrt{Ka}(1 - e^2)(1 - \cos i), & \eta_3 &= -\delta\mathcal{L}\end{aligned}$$

можно получить из канонических элементов Делоне (см. предыдущую задачу) с помощью линейного преобразования переменных.

§ 3. Движение в центральном поле сил

Справочные сведения

Рассмотрим движение материальной точки массы m под действием силы F , линия действия которой постоянно проходит через одну и ту же точку (*центр*). Такая сила называется *центральной*. В случае центральной силы орбита материальной точки всегда будет представлять собой плоскую кривую, а движение по орбите будет происходить согласно *закону площадей (интегралу площадей)*:

$$r^2\dot{\varphi} = c. \quad (1)$$

Здесь r — радиус-вектор, исходящий из центра сил, а φ — полярный угол, отсчитываемый от некоторого фиксированного направления, c — постоянная площадей.

Радиус-вектор точки как функция времени определяется из дифференциального уравнения

$$m(\ddot{\mathbf{r}} - r\dot{\varphi}^2) = F. \quad (2)$$

Вводя величину u , обратную радиусу-вектору, получим *первую формулу Бине*

$$V^2 = c^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right], \quad (3)$$

позволяющую определить модуль скорости, если известно уравнение орбиты.

Уравнение орбиты определяется при помощи *второй формулы Бине*

$$mc^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right) = \pm F, \quad (4)$$

в которой знак плюс соответствует притягивающей силе, а знак минус — отталкивающей.

Л и т е р а т у р а: основная — [1], дополнительная — [8].

ЗАДАЧИ

1. Звезда, движущаяся в однородной сферической звездной системе, описывает эллипс, центр которого совпадает с центром этой системы. Докажите, что в любой момент времени модуль скорости звезды определяется формулой

$$V = \frac{2\pi}{P} \rho,$$

где ρ — полудиаметр, сопряженный с радиусом-вектором звезды, а P — период ее обращения.

2. Группа звезд с равными массами находится в однородной сферической системе. Пренебрегая размерами звезд и считая, что в начальный момент они находились в одной точке пространства, докажите, что если концы векторов начальных скоростей звезд лежали на одной прямой, параллельной их начальному радиусу-вектору, исходящему из центра системы, то звезды будут описывать эллипсы с одинаковой площадью.

3. На материальную точку действует центральная сила, обратно пропорциональная кубу расстояния от притягивающего центра. Найдите зависимость радиуса-вектора этой точки от времени.

4. Докажите, что закон, согласно которому сила изменяется обратно пропорционально кубу расстояния от центра силы, является единственным, при котором «параболическая скорость» на любом расстоянии равна кеплеровской круговой скорости на том же расстоянии.

5. Материальная точка, подверженная действию отталкивающей силы, обратно пропорциональной кубу ее расстояния от центра силы, брошена из бесконечности с такой скоростью, что если бы эта скорость была направлена к центру силы, то точка приблизилась бы к центру силы на расстояние a . В действительности же точку бросают вдоль прямой, расстояние которой от центра силы составляет b . Покажите, что минимальное расстояние точки от центра силы будет равно $\sqrt{a^2 + b^2}$, а угол между асимптотами орбиты равен $\pi b / \sqrt{a^2 + b^2}$.

6. Материальная точка движется под действием центральной силы. Покажите, что если радиус кривизны орбиты изменяется обратно пропорционально кубу расстояния касательной от центра силы, то центральная сила пропорциональна расстоянию точки от центра.

7. Докажите, что центральная сила удовлетворяет уравнению

$$F = \frac{mc^2}{2} \frac{dl^{-2}}{dr},$$

в котором m — масса точки, r — расстояние от центра силы, c — постоянная интеграла площадей, l — расстояние касательной к орбите от центра силы.

8. Орбита, описываемая материальной точкой под действием центральной силы $F(r)$, обладает двумя апсидальными расстояниями a и

$b (a < b)$. Докажите, что скорость точки на расстоянии r от центра силы определится по формуле

$$V^2 = \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \int_a^r F(r) dr + \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \int_r^b F(r) dr.$$

9. Материальная точка движется под действием центральной силы $\nu + \mu/r^3$. В начальный момент она находилась на линии апсид на расстоянии a от центра силы и обладала скоростью $\sqrt{\mu/a}$. Найдите зависимость радиуса-вектора от времени.

10. Докажите, что радиус-вектор материальной точки, подверженной действию центральной силы $F(r)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = c - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left[r^2 \int F(r) dr \right],$$

где c — постоянная, зависящая от начальных условий.

11. Для устранения наблюдавшихся отклонений движения Луны от теории ее движения А. Клеро предложил новый закон тяготения Луны Землей:

$$F(r) = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\nu}{r^3},$$

в котором μ и ν — некоторые постоянные.

Найдите уравнение орбиты и дайте геометрическое истолкование полученному результату.

12. Сохраняя условия предыдущей задачи, найдите угол поворота линии апсид в течение одного периода обращения материальной точки.

13. Из точки с полярными координатами $r = r_0$, $\varphi = 0$ материальная точка начинает движение со скоростью V , составляющей с радиусом-вектором точки угол α , и описывает орбиту $\Phi(r, \varphi, r_0, V, \sin \alpha) = 0$. Покажите, что при тех же начальных условиях под действием дополнительной центральной силы μ/r^3 материальная точка опишет орбиту

$$\Phi[r, n, \varphi, r_0, V(n^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^{1/2}, n \sin \alpha (n^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^{1/2}] = 0,$$

где

$$n^2 = \Phi - \frac{\mu}{V^2 r_0^2 \sin^2 \alpha}.$$

14. Материальная точка, подверженная действию центральной силы, описывает параболическую орбиту. Центр силы совпадает с фокусом параболы. Покажите, что если на касательной к орбите в каждый момент времени отмечать точку, отстоящую на расстоянии $4a \cos \frac{\vartheta}{2} / (\vartheta + \sin \vartheta)$ от точки касания, то эта точка движется по

центральной кривой с центром в фокусе, причем площадь, описываемая радиусом-вектором точки, изменяется по тому же закону, как и для параболической орбиты. Здесь $4a$ — параметр, а Φ — угол, образованный линией апсид с прямой, соединяющей материальную точку с вершиной параболы.

15. Покажите, что дифференциальные уравнения движения материальной точки всегда разрешимы в квадратурах, если центральная сила определяется формулой

$$F = \frac{\Phi(\varphi)}{r^2(at+b)},$$

в которой a и b — любые постоянные величины (*задача Армеллини*).

16. Материальная точка описывает плоскую орбиту под действием центральной силы $F(r)$. Найдите закон изменения центральной силы, зависящей только от радиуса-вектора с началом в центре силы, под действием которой точка двигалась бы по той же орбите, однако так, чтобы отношение полярных углов для обеих орбит находилось всегда в постоянном отношении (*теорема Ньютона о «вращающихся» орбитах*).

§ 4. Устойчивость движения естественных небесных тел и космических аппаратов

Справочные сведения

Определение устойчивости в смысле А. М. Ляпунова. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений движения в нормальной форме:

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Будем предполагать, что решение существует для всех значений времени $t \geq t_0$, где t_0 — начальный момент. Пусть

$$y_i = f_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

представляет собой частное решение рассматриваемой системы, соответствующее начальным условиям:

$$\text{при } t=t_0 \quad y_i = y_i^0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Выбранное частное решение назовем *невозмущенным*, а все другие решения будем называть *возмущенными*. Начальные условия, соответствующие возмущенному движению, будем обозначать следующим образом:

$$\text{при } t=t_0 \quad y_i = y_i^0 + \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Здесь ε_i — действительные постоянные, которые назовем *начальными возмущениями*. Разности $y_i - f_i(t)$ будем называть *последующими возмущениями* или просто *возмущениями*.

Пусть Φ_i ($i=1, 2, \dots, n$) — некоторые заданные непрерывные функции y_1, y_2, \dots, y_n и времени t . Значения этих функций вдоль невозмущенного

решения обозначим через $\Phi_i^0(t)$. Рассмотрим разности возмущенных и невозмущенных значений функций

$$x_i = \Phi_i - \Phi_i^0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Невозмущенное решение называется *устойчивым в смысле Ляпунова* по отношению к величинам $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при любых действительных значениях $x_i^0 = x_i(t_0)$, удовлетворяющих условию

$$|x_i^0| < \delta \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

для всякого $t \geq t_0$ выполняются неравенства

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Невозмущенное решение называется *неустойчивым*, если найдется по крайней мере одна система начальных условий, приводящая при каком-либо $t > t_0$ хотя бы к одному из равенств

$$|x_i(t)| = \varepsilon. \quad (8)$$

Если в определении устойчивости рассматриваются не любые начальные возмущения, а только удовлетворяющие некоторым дополнительным ограничениям, то устойчивость называется *условной*.

Вместо исходных дифференциальных уравнений исследуется система уравнений возмущенного движения для возмущений величин Φ_i :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Правые части этих уравнений всегда таковы, что $X_i(t, 0, \dots, 0) = 0$. Невозмущенному решению исходной системы соответствует нулевое (равновесное) решение уравнений возмущенного движения.

Второй метод А. М. Ляпунова. Рассмотрим дифференцируемую функцию $V(t, x_1, \dots, x_n)$, определенную в некоторой области $|x_i| < A$ ($i=1, 2, \dots, n$) при любых $t \geq t_0$. Наряду с функцией V будем пользоваться ее производной в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (10)$$

Функция V называется *функцией Ляпунова*, если она и ее производная в силу уравнений возмущенного движения непрерывны и однозначны в области $|x_i| < A$ при любых $t \geq t_0$ и уничтожаются при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ и любом $t \geq t_0$.

Если функция Ляпунова кроме нулевых значений может получать в области $|x_i| < A$ и при всех $t \geq t_0$ кроме нулевых значений значения только одного знака, то она называется *знакопостоянной*.

Если знакопостоянная не зависящая от времени функция V в области $|x_i| < A$, $t \geq t_0$ уничтожается только при нулевых значениях переменных x_i , то такая функция называется *знакоопределенной*.

Зависящая явно от времени функция V называется *знакоопределенной*, если возможно найти такую не зависящую явно от времени определенно положительную функцию W , что либо разность $V - W$, либо $-V - W$ будет положительной функцией.

Теорема Ляпунова об устойчивости. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти *знакоопределенную* функцию V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений была

бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Метод связи интегралов Н. Г. Четаева. Пусть система дифференциальных уравнений возмущенного движения допускает s первых интегралов

$$V_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const} \quad (i=1, 2, \dots, s), \quad (11)$$

каждый из которых, вообще говоря, не является знакоопределенной функцией. Следуя Н. Г. Четаеву, функцию Ляпунова можно искать в виде нелинейной связи первых интегралов

$$V = F(V_1, V_2, \dots, V_s, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad (12)$$

зависящей от нескольких неопределенных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Исследуемое решение будет устойчивым, если эти параметры удается подобрать так, чтобы функция V была знакоопределенной. Последнее будет иметь место, если разложение функции в ряд по возрастающим степеням x_i будет начинаться с однородной знакоопределенной формы четного порядка.

Необходимое условие устойчивости. Если правые части уравнений возмущенного движения голоморфны относительно x_i , а линейные относительно x_i члены разложений правых частей в ряды не зависят явно от времени, то можно указать необходимые условия устойчивости. В этом случае систему уравнений возмущенного движения можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}x_j + X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

где все p_{ij} суть постоянные величины, а X_i — голоморфные функции переменных x_i , разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка. Поведение решений уравнений возмущенного движения зависит от корней определяющего уравнения, соответствующего уравнениям первого приближения, получающихся из точной системы уравнений возмущенного движения путем отбрасывания функций X_i . Определяющее уравнение имеет вид

$$D(\kappa) = \det(\|p_{ij}\| - \kappa E) = 0, \quad (14)$$

где $\|p_{ij}\|$ — матрица коэффициентов, а E — единичная матрица.

Необходимое условие устойчивости состоит в том, что среди корней определяющего уравнения отсутствуют корни с положительными действительными частями.

Достаточное условие неустойчивости. Если между корнями определяющего уравнения находятся такие, действительные части которых положительны, то невозмущенное решение неустойчиво, каковы бы ни были функции X_i ($i=1, 2, \dots, n$).

Литература: основная — [1], [3], дополнительная — [5], [6].

ЗАДАЧИ

1. Найдите достаточные условия устойчивости по отношению к радиусу-вектору и радиальной скорости круговых движений материальной точки в центральном поле сил, предполагая, что начальные возмущения в радиусе-векторе и скорости лежат в плоскости невозмущенной орбиты и не изменяют постоянной площадью.

2. Покажите, что эллиптическое движение в задаче двух тел обладает свойством орбитальной устойчивости при любых значениях

большой полуоси и эксцентриситета, если начальные возмущения подчинены условию неизменяемости постоянной площадей.

3. Найдите необходимые и достаточные условия устойчивости круговых орбит точки в силовых полях, обладающих осевой симметрией.

4. Докажите, что круговые орбиты звезд в шаровом звездном скоплении с радиальным законом распределения плотности всегда устойчивы.

5. По исследованиям проф. П. П. Паренаго гравитационное поле галактики в окрестности ее экваториальной плоскости хорошо аппроксимируется силовой функцией

$$U = \frac{U_c}{1 + k_2 \rho^2} e^{-\lambda z^2},$$

где параметры U_c , λ , k_2 равны

$$U_c = 11,0 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2/\text{сек}^2, \quad \lambda = 5,9 \cdot 10^{-45} \text{ см}^{-2}, \quad k_2 = 2,49 \cdot 10^{-45} \text{ см}^{-2},$$

а ρ , z — галактические цилиндрические координаты. Исследуйте устойчивость круговых экваториальных орбит звезд в галактике, гравитационное поле которой описывается потенциалом Паренаго.

6. Согласно исследованиям Мэйолла и Аллера движений звезд во внегалактической туманности $M 33$ в области, удаленной от центра туманности на расстояние от 400 до 800 парсек, скорости звезд линейным образом зависят от расстояния до центра галактики, т. е. гравитационный потенциал галактики в этой области можно удовлетворительно аппроксимировать потенциалом однородного эллипсоида вращения. Изучите устойчивость движения звезд в этой области.

7. Докажите, что среди всех орбит с данной постоянной площадей в гравитационном поле с осевой симметрией и с плоскостью симметрии, перпендикулярной этой оси, наименьшую энергию имеет круговая орбита в плоскости симметрии, если только эта орбита устойчива (*теорема Линдблада*).

8. Покажите, что круговые орбиты звезд на периферии однородной сжатой сфероидальной галактики неустойчивы, если эксцентриситет сфероида превосходит значение 0,834.

9. Космическому аппарату, движущемуся в центральном ньютоновском поле, сообщается постоянное радиальное ускорение. При каких условиях орбита космического аппарата будет окружностью? Получите условия орбитальной устойчивости круговых движений.

10. Чтобы искусственный спутник мог двигаться по окружности, расположенной в плоскости одной из параллелей планеты («широтный» спутник), ему сообщается постоянное по величине реактивное ускорение, все время направленное коллинеарно оси вращения планеты. При каких значениях широты спутника φ такие круговые движения орбитально устойчивы?

11. Покажите, как изменятся условия орбитальной устойчивости «широтного» искусственного спутника, полученные в предыдущей задаче,

если ему сообщается постоянное по величине реактивное ускорение, пересекающее ось вращения планеты под одним и тем же углом ψ

12. Покажите, что полученным в предыдущих задачах условиям устойчивости можно дать следующую интерпретацию: для устойчивых круговых орбит необходимо и достаточно, чтобы их радиус ρ удовлетворял неравенству $0 < \rho < 2/3 \sqrt[4]{3} \rho_{\max}$, где ρ_{\max} — максимально возможный радиус круговой орбиты.

13. При исследовании движения космического аппарата в сфере действия планеты силовое поле допустимо аппроксимировать потенциалом

$$U = \frac{K_p}{r} - \frac{K_c}{2a^3} r^2,$$

где второе слагаемое приближенно учитывает гравитационное возмущение от Солнца (K_p — гравитационный параметр планеты, K_c — гравитационный параметр Солнца, a — среднее расстояние планеты от Солнца). Исследуйте орбитальную устойчивость круговых движений космического аппарата.

14. Спутник в виде тонкого однородного цилиндра движется в центральном ньютоновском поле сил так, что его центр масс описывает окружность радиуса r . Считая движение плоским, определите положения относительного равновесия спутника, взяв за обобщенную координату угол φ между осью спутника и радиусом-вектором его центра масс. Составьте уравнения малых колебаний относительно устойчивого положения равновесия спутника.

15. Исследуйте устойчивость круговых экваториальных орбит искусственного спутника сфероидальной планеты, учитывая возмущающее действие второй зональной гармоники. Найдите условия устойчивости круговых экваториальных орбит спутников Земли и Сатурна. Значения коэффициента при второй зональной гармонике для Земли и Сатурна принять соответственно равными $-1082,5 \cdot 10^{-6}$ и $-1003 \cdot 10^{-6}$.

16. «Трехосная» планета равномерно вращается вокруг наименьшей оси центрального эллипсоида инерции с постоянной угловой скоростью n . Ограничиваясь в разложении ее гравитационного потенциала членами до второй сферической гармоники включительно, найдите необходимые условия устойчивости точек либрации.

17. В тригонометрической теории вековых возмущений Лагранжа элементы орбиты $x = \operatorname{tg} i \sin \varOmega$, $y = \operatorname{tg} i \cos \varOmega$, удовлетворяют приближенным уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = -y [b - c(x^2 + y^2)],$$

$$\frac{dy}{dt} = x [b - c(x^2 + y^2)],$$

где b и c — постоянные величины. Найдите необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения этой системы.

18. Тригонометрическая теория вековых возмущений Лагранжа для малых планет типа Венгрия (№ 434) приводит к дифференциальным уравнениям для элементов орбиты $x = \operatorname{tg} i \sin \varrho$, $y = \operatorname{tg} i \cos \varrho$ следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = -y[b - c(x^2 + y^2)] + F \cos(\sigma t + \delta),$$

$$\frac{dy}{dt} = x[b - c(x^2 + y^2)] - F \sin(\sigma t + \delta),$$

где b , c , σ , δ и F — постоянные.

Покажите, что эти уравнения допускают частное решение

$$x = K \sin(\sigma t + \delta), \quad y = K \cos(\sigma t + \delta).$$

Найдите необходимые условия устойчивости этого решения по отношению к оскулирующему элементу $\operatorname{tg} i$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения, «Наука», 1968.
2. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, Физматгиз, 1963.
3. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, «Наука», 1964.
4. Шарлье К., Небесная механика, пер. с нем., «Наука», 1966.

Дополнительная

5. Абалякин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», 1971.
6. Дубошин Г. Н., Основы теории устойчивости, Изд-во МГУ, 1952.
7. Румянцев В. В., Об устойчивости стационарных движений спутников, ВЦ АН СССР, 1967.
8. Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, пер. с англ., ОНТИ, 1937.

ГЛАВА VII

ОСНОВНЫЕ НЕОГРАНИЧЕННЫЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ ЗАДАЧИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Уравнения движения и первые интегралы задачи нескольких тел в барицентрической системе координат

Справочные сведения

Уравнения движения. *Задача нескольких тел* состоит в исследовании движения системы материальных точек с массами m_1, m_2, \dots, m_n , притягивающимися друг к другу в соответствии с законом тяготения Ньютона.

В барицентрической системе координат (с началом в центре инерции рассматриваемой системы точек) с фиксированными направлениями осей дифференциальные уравнения движения задачи запишутся следующим образом:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \text{grad}_{\mathbf{r}_i} U \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -й точки, а силовая функция U равна

$$U = f \sum_{\substack{k, l=1 \\ i < k}}^n \frac{m_i m_k}{\Delta_{ik}}, \quad (2)$$

причем

$$\Delta_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|.$$

Первые интегралы. Уравнения движения (1) допускают два очевидных векторных интеграла движения центра масс:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = 0, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i = 0, \quad (4)$$

векторный интеграл площадей

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i, m_i \dot{\mathbf{r}}_i] = \sigma, \quad (5)$$

в котором σ — векторная постоянная площадей, и *интеграл живых сил* (*интеграл энергии*)

$$T = U + h, \quad (6)$$

где постоянная h обозначает полную механическую энергию системы, а T — живую силу (кинетическую энергию).

Формула Лагранжа — Якоби. Для рассматриваемой системы материальных точек справедлива формула Лагранжа — Якоби

$$\ddot{I} = 2(2T - U), \quad (7)$$

в которой I — полярный момент инерции системы относительно центра инерции.

Литература: основная — [1] — [4], дополнительная — [5] — [9].

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что полярный момент инерции I системы гравитирующих материальных точек относительно центра инерции удовлетворяет каждому из уравнений:

$$\ddot{I} = 2(T + h), \quad \ddot{I} = 2(U + 2h).$$

2. Докажите, что при положительной полной механической энергии системы гравитирующих материальных точек с течением времени ($t \rightarrow \infty$) хотя бы одна из точек системы должна удалиться на неограниченно большое расстояние от центра инерции системы.

3. Докажите справедливость неравенства Зундмана

$$\sigma^2 \leq I(\ddot{I} - 2h).$$

4. Возможна ли такая система из нескольких взаимно притягивающихся точек, в которой все точки системы столкнутся в одной точке пространства лишь через бесконечно большой промежуток времени?

5. Система взаимно притягивающихся материальных точек находится в установившемся состоянии. Докажите, что кинетическая энергия системы постоянна и равна половине величины потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком.

6. Покажите, что произведение полярного момента инерции системы гравитирующих точек относительно центра инерции на потенциал их взаимного тяготения определяется конфигурацией системы и не зависит от ее линейных размеров. Докажите также, что при не равной нулю векторной постоянной площадей указанная величина (она называется *постоянной конфигурации*) удовлетворяет неравенству

$$IU^2 \geq -2h\sigma^2.$$

7. Движения звезд в звездном скоплении таковы, что во все время движения отношения взаимных расстояний звезд остаются неизменными. Считая полную механическую энергию скопления отрицательной, покажите, что полярный момент инерции скопления (отно-

сительно центра инерции) изменяется периодическим образом, причем период есть функция только полной энергии и постоянной конфигурации (см. предыдущую задачу).

8. Докажите справедливость *теоремы Вейерштрасса — Зундмана*:

Для одновременного соударения n взаимно гравитирующих материальных точек в одной точке пространства необходимо, чтобы момент количеств движения системы этих точек был равен нулю.

9. Система состоит из n взаимно притягивающихся материальных точек с массами m_1, m_2, \dots, m_n . Выразите величину

$$L = \sum_{i, k=1}^n m_i m_k \Delta_{ik},$$

в которой Δ_{ik} — расстояние между i -й и k -й точками системы, через полную массу всей системы и ее полярный момент инерции относительно центра масс. Составьте дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет величина L , выразив правую часть уравнения через массу системы, ее кинетическую энергию и потенциал тяготения.

10. Докажите, что в каждый момент времени потенциал тяготения $U(t)$ материальных точек удовлетворяет неравенству

$$U(t) \leq \frac{M^2}{2\rho_{\min}(t)},$$

в котором M — масса всей системы, $\rho_{\min}(t)$ — наименьшее из расстояний между точками системы в момент t .

11. Система из n взаимно притягивающихся материальных точек имеет отрицательную полную механическую энергию h . Докажите, что минимальное расстояние между точками системы все время остается ограниченным сверху:

$$\rho_{\min}(t) \leq \frac{M^2}{2|h|}.$$

12. Сохраняя условия предыдущей задачи, покажите, что, как бы ни было велико число $t_0 > 0$ и каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$, всегда найдется такой момент $t > t_0$, что

$$\rho_{\min}(t) < \frac{M^2}{4|h| - \varepsilon}.$$

13. Пусть $d(t)$ — наибольшее из расстояний n материальных точек от их центра инерции S в момент t , m — наименьшая из масс этих точек, а M — полная масса системы. Докажите, что в любой момент времени справедливо неравенство

$$md^2 \leq I \leq Md^2.$$

14. Пусть M — полная масса системы n материальных точек, $\Delta(t)$ — наибольшее из расстояний между этими точками в момент t .

Докажите, что существуют такие положительные константы A и B , зависящие только от масс точек системы, что в каждый момент времени

$$A\Delta^2 \leq I \leq B\Delta^2.$$

15. Докажите следующие утверждения:

а) Если n материальных точек при своем движении сближаются между собой не менее, чем на некоторое наперед заданное расстояние δ , то максимальное расстояние между точками системы $\Delta(t)$ растет не быстрее, чем первая степень времени t :

$$\Delta(t) \leq \beta t, \quad \beta = \text{const}, \quad \beta > 0.$$

б) Если полная механическая энергия системы положительна, то максимальное расстояние между точками системы растет не медленнее, чем первая степень времени:

$$\Delta(t) \geq \alpha t, \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0.$$

16. Среднее арифметическое значение кинетической энергии $T(t)$ системы n материальных точек на отрезке $[0, t]$ принимается равным

$$\frac{1}{t} \int_0^t T(t) dt.$$

Вводя в рассмотрение величину

$$\tilde{T} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(t) dt,$$

докажите:

а) если с течением времени взаимные расстояния между точками системы остаются ограниченными сверху, то

$$\tilde{T} = -h;$$

б) если $\tilde{T} = -h$, то наибольшее из взаимных расстояний $\Delta(t)$ между точками системы растет медленнее, чем t^2 , точнее,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Delta(t)}{t^2} = 0$$

(теорема Г. Полларда).

§ 2. Уравнения относительного движения в задаче нескольких тел

Справочные сведения

Первая форма уравнений относительного движения. Рассмотрим движение n взаимно притягивающихся материальных точек с массами m_0, m_1, \dots, m_{n-1} относительно прямоугольной системы координат, оси которой сохраняют неизменное направление в абсолютном пространстве,

а начало помещено в точку с массой m_0 . Если через r_i обозначить радиус-вектор i -й точки, исходящий из начала координат, и положить $\Delta_{ij} = |r_i - r_j|$, то дифференциальные уравнения относительного движения точек m_1, m_2, \dots, m_{n-1} запишутся в виде

$$\ddot{r}_i + \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i^3} r_i = \text{grad}_{r_i} R_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad (1)$$

где R_i — пертурбационная (возмущающая) функция, определяемая формулой

$$R_i = f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i \cdot r_j}{r_j^3} \right). \quad (2)$$

Вторая форма уравнений относительного движения. Эта форма уравнений движения записывается в системе *якобиевых координат*. Координаты Якоби вводятся следующим образом:

а) движение точки с массой m_1 задается относительно системы координат с началом в точке с массой m_0 и с неизменно направленными осями;

б) движение точки с массой m_2 задается относительно системы координат с началом в центре инерции масс m_0 и m_1 , оси которой параллельны осям предшествующей системы;

в) движение точки с массой m_3 задается относительно системы координат с началом в центре инерции точек m_0, m_1 и m_2 , оси которой параллельны осям введенных систем координат, и т. д.

Обозначая теперь радиус-вектор точки с массой m_i в соответствующей системе координат через ρ_i (а ее координаты — через ξ_i, η_i, ζ_i) и полагая, кроме того,

$$\mu_i = m_i \frac{m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}}{m_0 + m_1 + \dots + m_i}, \quad (3)$$

запишем дифференциальные уравнения движения в следующей форме:

$$\mu_i \ddot{\rho}_i = \text{grad}_{\rho_i} U \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad (4)$$

где U — потенциал взаимного тяготения точек системы, выраженный через якобевы координаты.

Если положить

$$\left. \begin{aligned} q_{3i-2} &= \xi_i, & q_{3i-1} &= \eta_i, & q_{3i} &= \zeta_i, \\ p_{3i-2} &= \mu_i \dot{\xi}_i, & p_{3i-1} &= \mu_i \dot{\eta}_i, & p_{3i} &= \mu_i \dot{\zeta}_i, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

то уравнения (4) можно преобразовать к гамильтоновой форме:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad (6)$$

где гамильтониан H дается формулой

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2\mu_i} (p_{3i-2}^2 + p_{3i-1}^2 + p_{3i}^2) - U. \quad (7)$$

Применяя аппарат канонических преобразований (см. гл. VI), уравнения движения (6) можно преобразовывать к различной форме с учетом специфики конкретной задачи.

Л и т е р а т у р а: основная — [1]—[4], дополнительная — [5], [8], [9].

ЗАДАЧИ

1. Напишите дифференциальные уравнения селеноцентрического движения искусственного спутника Луны, принимая во внимание возмущающее действие второй сферической гармоники потенциала лунного тяготения и Земли (считая Землю точечной массой).

2. Два искусственных спутника Луны S_1 и S_2 находятся в некоторый момент времени на прямой, соединяющей центры масс Земли и Луны, на одинаковом селеноцентрическом расстоянии, причем спутник S_2 находится между Луной и Землей, а спутник S_1 — на продолжении геоцентрического радиуса-вектора Луны. Какой из спутников имеет большее ускорение относительно Луны?

3. Луну можно рассматривать обращающейся вокруг Земли и возмущенную Солнцем или обращающейся вокруг Солнца и возмущенную Землей. Принимая геоцентрическую орбиту Луны за окружность, найдите положения, при которых возмущающее ускорение от Солнца будет максимальным. Покажите, что возмущающее ускорение от Земли, если рассматривать Луну обращающейся по круговой гелиоцентрической орбите, для такого же положения будет минимальным.

4. Сохраняя условия предыдущей задачи, найдите отношение наибольшего возмущающего ускорения от Солнца к наименьшему возмущающему ускорению от Земли. Вычислите отношение возмущающей силы от Солнца в максимуме к силе солнечного притяжения и отношение максимального возмущающего ускорения от Солнца к гравитационному ускорению от Земли.

5. Преобразуйте дифференциальные уравнения относительного движения в задаче n тел к сферическим координатам.

6. Докажите теорему «об исключении узлов» (в задаче трех тел), принадлежащую Якоби:

Плоскость орбиты материальной точки m_1 относительно массы m_0 и плоскость орбиты материальной точки m_2 в ее движении относительно центра масс первых двух точек пересекаются по прямой, параллельной неизменной плоскости Лапласа.

7. Получите интегралы площадей в задаче трех тел, исходя из дифференциальных уравнений движения в координатах Якоби.

8. В начальный момент скорости трех взаимно притягивающихся материальных точек с массами m_1 , m_2 и m_3 лежат в плоскости, проходящей через эти точки. Рассматривая движение точек в этой плоскости, составьте канонические уравнения движения системы, принимая в качестве обобщенных координат прямоугольные координаты материальных точек относительно произвольной инерциальной прямоугольной системы координат.

9. Канонические уравнения плоской задачи трех тел, полученные в предыдущей задаче, преобразуйте при помощи канонического преобразования, заданного производящей функцией

$$W = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + p_4 q_4 + (p_1 + p_3 + p_5) q_5 + (p_2 + p_4 + p_6) q_6,$$

в которой q_1, q_2, \dots, q_6 — новые обобщенные координаты, а p_1, p_2, \dots, p_6 — старые канонические импульсы. Выясните геометрический и механический смысл новых канонических переменных.

10. Для устранения особенностей в правых частях канонических дифференциальных уравнений движения в задаче трех тел, которые возникают в момент соударения каких-либо двух точек системы, выполняется регуляризирующее преобразование независимой переменной (времени). Оно определяется соотношением

$$dt = J d\tau,$$

в котором τ — новая независимая переменная, через J обозначена функция от наименьшего из взаимных расстояний между точками системы, уничтожающаяся вместе с последним. Покажите, что регуляризирующее преобразование не нарушает гамильтоновой формы уравнений.

§ 3. Частные решения задачи нескольких тел

Справочные сведения

Постоянные конфигурации в задаче n тел. Рассмотрим постоянные конфигурации в задаче n тел. В барицентрической системе координат необходимое условие существования постоянных конфигураций имеет вид

$$f \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \frac{m_i}{\Delta_{is}^3} \Delta_{is} = \left(\frac{a_s}{r_s}\right)^3 r_s \omega^2 \quad (s=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где ω и a_s — постоянные величины. В процессе движения отношения взаимных расстояний должны оставаться неизменными, т. е. для каждого момента времени выполняются соотношения

$$\frac{a_1}{r_1} = \frac{a_2}{r_2} = \dots = \frac{a_n}{r_n}. \quad (2)$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\ddot{r}_s = - \left(\frac{a_s}{r_s}\right)^3 \omega^2 r_s \quad (s=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Коллинеарные и треугольные решения задачи трех тел. В неограниченной задаче трех тел существует два типа частных решений, которым соответствуют постоянные конфигурации: *лагранжевы треугольные решения и коллинеарные решения.*

Эти частные решения определяются с помощью уравнений (1), которые для задачи трех тел принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{f m_2}{\Delta_{12}^3} \Delta_{12} - \frac{f m_3}{\Delta_{31}^3} \Delta_{31} &= -\omega^2 r_1, \\ \frac{f m_3}{\Delta_{23}^3} \Delta_{23} - \frac{f m_1}{\Delta_{12}^3} \Delta_{12} &= -\omega^2 r_2, \\ \frac{f m_1}{\Delta_{31}^3} \Delta_{31} - \frac{f m_2}{\Delta_{23}^3} \Delta_{23} &= -\omega^2 r_3. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

К этим уравнениям необходимо добавить условие, что начало координат лежит в центре инерции системы

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 = 0. \quad (5)$$

Постоянная конфигурация в виде равностороннего треугольника, вращающегося с угловой скоростью ω , характеризуется соотношениями

$$\Delta_{12} = \Delta_{23} = \Delta_{31} = r, \quad (6)$$

$$\omega^2 = \frac{f(m_1 + m_2 + m_3)}{r^3}. \quad (7)$$

Коллинеарные решения возможны для трех случаев взаимного расположения притягивающихся масс на одной прямой (рис. 7.1). Эти решения определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{f m_2}{r^3} + \frac{f m_3}{r^3 (1+x)^2} &= \frac{\omega^2}{m_1 + m_2 + m_3} [m_2 + (1+x) m_3], \\ \frac{f m_1}{r^3 (1+x)^2} + \frac{f m_2}{r^3 x^2} &= \frac{\omega^2}{m_1 + m_2 + m_3} [(1+x) m_1 + x m_2], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

в которых вместо Δ_{12} и Δ_{23} введены величины r и x :

$$\Delta_{12} = x, \quad \Delta_{23} = r x. \quad (9)$$

Уравнение относительно x имеет вид

$$(m_1 + m_2) x^5 + (3m_1 + 2m_2) x^4 + (3m_1 + m_2) x^3 - (m_2 + 3m_3) x^2 - (2m_2 + 3m_3) x - (m_2 + m_3) = 0, \quad (10)$$

а угловая скорость определяется из соотношения

$$\omega^2 = \frac{f(m_1 + m_2 + m_3)}{r^3} \frac{m_1 x^2 - m_3}{m_1 x^2 - m_3 x^3}. \quad (11)$$

Треугольные решения задачи трех тел имеют место как при ньютоновском законе притяжения, так и при любом ином законе тяготения, в котором

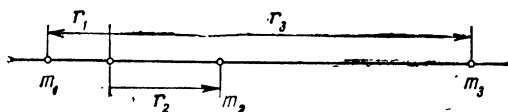


Рис. 7.1.

сила притяжения обратно пропорциональна k -й степени взаимного расстояния. Необходимое условие устойчивости треугольного решения (*условие Рауса*) в случае ньютоновского закона тяготения имеет вид

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} > 27. \quad (12)$$

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [4], дополнительная [5], [8], [9].

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что в постоянной конфигурации, имеющей вид равностороннего треугольника, три взаимно притягивающиеся массы m_1 , m_2 и m_3 удалены от центра инерции системы на расстояния r_1 , r_2 и r_3 , которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{r_2}{\sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2}} = \frac{r_2}{\sqrt{m_3^2 + m_3 m_1 + m_1^2}} = \frac{r_3}{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}.$$

2. Три взаимно притягивающиеся единичные массы описывают круговые орбиты вокруг их общего центра инерции, постоянно оставаясь в вершинах равностороннего треугольника, сторона которого принята за единицу длины. Найдите радиус круговой кеплеровской орбиты, которую описывала бы материальная частица пренебрежимо малой массы вокруг одной из данных масс, если период ее обращения был бы равен периоду обращения трех данных масс вокруг их центра инерции (при указанной треугольной конфигурации).

3. Три взаимно притягивающиеся материальные точки, массы которых находятся в соотношении

$$m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 2 : 3,$$

в процессе движения постоянно находятся в вершинах равностороннего треугольника. Стороны этого треугольника равны единице. Найдите, на каких расстояниях друг от друга будут находиться притягивающиеся массы, если они будут совершать коллинейное лагранжево движение, характеризующееся тем же периодом.

4. Три материальные точки, массы которых равны массе Солнца, находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной, равной одной астрономической единице. Покажите, что для сохранения этой конфигурации период обращения точек вокруг центра инерции должен быть равным 210,9 суток.

5. Три материальные точки, массы которых равны массе Солнца, находятся на одной прямой, причем расстояние между ними составляет одну астрономическую единицу. Покажите, что для сохранения этой конфигурации период обращения указанных материальных точек вокруг их центра инерции должен составлять 326,7 суток.

6. Три взаимно притягивающиеся материальные точки с массами m_1 , m_2 и m_3 остаются во все время движения в вершинах равностороннего треугольника. Докажите, что масса m_1 будет двигаться относительно центра инерции системы так, как она двигалась бы, если бы она была пассивно гравитирующим спутником притягивающего тела, помещенного в центр инерции и имеющего массу

$$\frac{(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}.$$

7. При исследовании устойчивости треугольных точек либрации общей задачи трех тел с массами m_1, m_2, m_3 , когда каждое из тел описывает окружность вокруг их общего центра масс, Раусом были получены следующие необходимые и достаточные условия устойчивости в линейном приближении при ньютоновском законе притяжения:

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} > 27.$$

Определите область возможных положений центра масс треугольника $m_1 m_2 m_3$, при которых выполняется указанное неравенство.

8. Решите предыдущую задачу для закона притяжения, устанавливающего пропорциональность силы некоторой степени расстояния между притягиваемыми телами. Необходимое и достаточное условие устойчивости точек либрации в линейном приближении в этом случае имеет вид

$$\frac{(m_1 + m_2 + m_3)^2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3} > 3 \left(\frac{k-1}{k+3} \right)^2,$$

где k — любое вещественное число, являющееся показателем степени в законе притяжения.

9. Докажите, что если четыре произвольные точечные массы находятся в вершинах правильного тетраэдра, то равнодействующая сил взаимного тяготения, приложенная к каждой из точек, проходит через центр инерции системы, а модули ускорений точек пропорциональны их расстояниям от центра инерции.

10. Докажите, что если две массы, помещенные в противоположные вершины ромба, равны друг другу, то задача четырех тел в качестве частного решения допускает ромбическую конфигурацию, если отношение диагоналей ромба α подчиняется неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \alpha < \sqrt{3},$$

а отношение двух масс, находящихся на концах стороны ромба, равно

$$\frac{8 - \sqrt{(1 + \alpha^2)^3}}{8\alpha - \sqrt{(1 + \alpha^2)^3}}.$$

§ 4. Ограниченная задача трех тел

Справочные сведения

Дифференциальные уравнения движения ограниченной круговой задачи трех тел. *Ограниченная задача трех тел* состоит в исследовании движения материальной точки малой массы (пассивно гравитирующей точки) под действием сил притяжения к двум точкам с конечными массами, которые движутся вокруг общего центра масс по коническим сечениям (в согласии с решением задачи двух тел).

В зависимости от типа конического сечения, описываемого притягивающими массами, ограниченная задача трех тел называется *круговой*, *эллиптической* и т. д.

Пусть в круговой задаче трех тел притягивающие массы m_1 и m_2 обращаются вокруг их общего центра инерции по круговым орбитам соответственно радиусов $|a_1|$ и $|a_2|$, причем их среднее движение равно n (рис. 7.2). Во вращающейся прямоугольной системе координат, начало которой C совпадает с центром инерции притягивающих масс ($m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$), а за основную плоскость x, y принята плоскость орбит притягивающих масс, причем ось x постоянно проходит через точки с конечными массами (система координат вращается с постоянной угловой скоростью n вокруг оси z), дифференциальные уравнения движения пассивно гравитирующей точки запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= U'_x, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= U'_y, \\ \ddot{z} &= U'_z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где силовая функция U определяется формулой

$$U = \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_2}{r_2}. \quad (2)$$

Здесь

$$r_i^2 = (x - a_i)^2 + y^2 + z^2 \quad (i=1, 2). \quad (3)$$

Эти уравнения допускают один первый интеграл — интеграл Якоби:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + U + h, \quad (4)$$

с помощью которого можно исследовать качественные свойства движения.

Критерий Тиссерана. Если одна из масс, например m_1 , существенно меньше другой, и при этом пассивно гравитирующая точка достаточно удалена от обеих притягивающих масс, то, переходя в интеграле Якоби от прямоугольных координат к кеплеровским элементам (большой полуоси a , эксцентриситету e и наклонению i), получаем приближенное выражение для интеграла Якоби

$$\frac{1}{a} + 2nK^{-1} \sqrt{p} \cos i = \text{const}. \quad (5)$$

Это соотношение применяется при отождествлении комет, тесно сближающихся с Юпитером, и носит название *критерия Тиссерана*.

Точки либрации.

Круговая задача трех тел допускает пять частных решений, которым соответствуют положения относительного равновесия (точки либрации). Точки либрации, расположенные на прямой, проходящей через конечные массы, называются *коллинеарными* и обозначаются через L_1, L_2 и L_3 (рис. 7.3). Их абсциссы находятся из уравнения

$$(m_1 + m_2)r_1^3 \pm (3m_1 + 2m_2)r_2^3 + (3m_1 + m_2)r_3^3 - m_2 r_2^2 \pm 2m_2 r_2 - m_2 = 0, \quad (6)$$

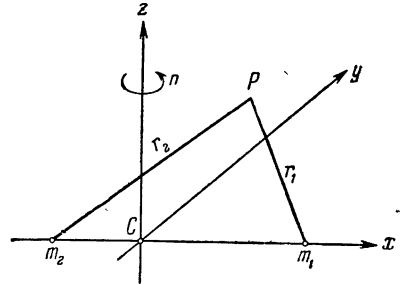


Рис. 7.2.

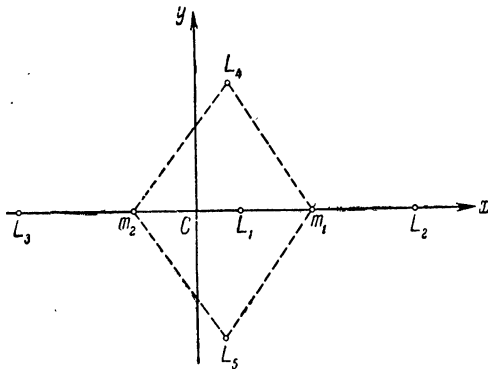


Рис. 7.3.

причем соответственно $r_1 = 1 \pm r_2$. Две точки либрации расположены в вершинах равностороннего треугольника, образованного тремя телами. Они называются *треугольными точками либрации* и обозначаются через L_4 и L_5 (рис. 7.3).

Коллинеарные точки либрации неустойчивы в смысле Ляпунова, а для треугольных точек либрации необходимое условие устойчивости сводится к неравенству

$$(m_1 + m_2)^2 > 27 m_1 m_2. \quad (7)$$

Ограниченная эллиптическая задача трех тел. Пусть притягивающие массы описывают вокруг их общего центра инерции эллиптические орбиты, плоскость которых примем за основную координатную плоскость x, y . Придадим системе координат вращение вокруг оси аппликат такое, чтобы притягивающие массы постоянно находились на оси абсцисс. Введем переменную единицу длины, приняв в качестве нее переменное расстояние между притягивающими массами. В качестве аргумента возьмем истинную аномалию v одной из притягивающих масс. Обозначая введенные безразмерные координаты через ξ, η, ζ , а штрихом — дифференцирование по истинной аномалии, принятой за аргумент, дифференциальные уравнения движения можно записать в форме, указанной Нехвиллом:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Пусть p — фокальный параметр, а e — эксцентриситет эллиптической орбиты одной конечной массы, в ее движении относительно другой массы. Силовая функция Ω равна

$$\Omega = \rho \left[\frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2} e \cos v \cdot \zeta^2 + \frac{p^3}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \right], \quad (9)$$

причем

$$\rho = \frac{1}{1 + e \cos v}, \quad \rho_i = (\xi - \xi_i)^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad \xi_1 = -\frac{m_2 p}{m_1 + m_2}, \quad \xi_2 = \frac{m_1 p}{m_1 + m_2}.$$

Задача допускает частные решения, аналогичные либрационным решениям круговой задачи. В безразмерных переменных координаты точек либрации в эллиптической задаче совпадают с координатами соответствующих решений круговой задачи трех тел.

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [4], дополнительная — [5], [6], [8], [9].

ЗАДАЧИ

1. Комета движется по параболической гелиоцентрической орбите, лежащей в плоскости орбиты Юпитера. В результате близкого прохождения кометы мимо Юпитера возмущения от Юпитера преобразуют параболическую орбиту кометы в эллиптическую. Покажите, что фокальный параметр вследствие возмущений от Юпитера возрастает. Орбиту Юпитера считать круговой.

2. Комета при движении к Солнцу по параболической орбите прошла вблизи Юпитера. В результате возмущающего действия Юпитера перигелийное расстояние параболической орбиты удвоилось.

Каково будет соотношение между новым и старым значениями наклона орбиты кометы? Орбиту Юпитера считать круговой.

3. Комета движется по эллиптической орбите в плоскости орбиты Юпитера. Возмущающим влиянием Юпитера можно пренебречь, за исключением короткого промежутка времени сближения кометы с Юпитером. Докажите, что если возмущение от Юпитера увеличивает эксцентриситет орбиты кометы, то период может либо уменьшиться, либо увеличиться в зависимости от значения произведения большой полуоси на квадратный корень из фокального параметра.

4. ИСЗ в некоторый момент времени находился на отрезке прямой, соединяющей центры масс Луны и Земли, на геоцентрическом расстоянии 10 000 км. Вектор геоцентрической скорости спутника в этот момент был компланарен плоскости геоцентрической орбиты Луны, а модуль его составлял 6,3 км/сек. Считая орбиту Луны круговой, покажите, что возмущающее действие Луны не может вывести спутник из некоторой достаточно малой (по сравнению с расстоянием от Земли до Луны) геоцентрической области.

5. В конце прошлого и начале этого века копенгагенские небесные механики численными методами детально изучали частный вариант ограниченной круговой задачи трех тел, в котором массы притягивающих тел равны. Покажите, что копенгагенский вариант круговой задачи трех тел допускает в качестве частных решений колебательные движения пассивно гравитирующей точки вдоль оси, проходящей через центр масс притягивающих тел и перпендикулярной плоскости их орбит. Исследуйте характер этих колебаний.

6. Примем для элементов орбиты малой планеты Гильды (№ 153) следующие значения:

Эпоха: 1948, авг., 7, 0^hUT,

$$M_0 = 192^\circ, 5, \quad \omega = 49^\circ, 3, \quad \Omega = 228^\circ, 4, \quad i = 7^\circ, 8, \\ \arcsin e = 8^\circ, 8, \quad n = 447'', 739, \quad a = 3,975$$

(эклиптика и равноденствие 1950,0).

Исследуйте устойчивость движения по Хиллу этой малой планеты (см. сноску на стр. 52).

7. Примем для элементов орбиты малой планеты Евы (№ 164) следующие значения:

Эпоха: 1952, апр., 28, 0^hUT,

$$M_0 = 206^\circ, 2, \quad \omega = 282^\circ, 6, \quad \Omega = 77^\circ, 5, \quad i = 24^\circ, 4, \\ \arcsin e = 20^\circ, 2, \quad n = 829'', 685, \quad a = 2,854$$

(эклиптика и равноденствие 1950,0).

Исследуйте устойчивость движения по Хиллу этой малой планеты.

8. Польский астроном Кордылевский в 1961 г. из наблюдений, выполнявшихся им на Высоких Татрах, открыл слабо светящиеся пылевые облака, расположенные в треугольных точках либрации

системы «Земля — Луна». Установите, выполняется ли для этих облаков необходимое условие устойчивости. Орбиты Земли и Луны считать круговыми кеплеровскими. Расстояние между Землей и Луной принять равным 384 тыс. км, а отношение масс Луны и Земли взять равным $1/81,3$.

9. Вычислите геоцентрические расстояния коллинеарных точек либрации в ограниченной круговой задаче трех тел «Земля — Луна — частица». Необходимые числовые данные взять из условия предыдущей задачи.

10. Выясните взаимное расположение коллинеарных точек либрации для системы «Земля — Луна» и системы «Солнце — Земля». Установите, могут ли эти точки либрации попадать в конус земной тени. Числовые данные о системе «Земля — Луна» взять из задачи 8. Расстояние от Земли до коллинеарных точек либрации системы «Солнце — Земля» принять равным $1,5 \cdot 10^6$ км.

11. Согласно гипотезе Мультона — Чемберлена причиной наблюдаемого противосияния является скопление метеорной пыли в коллинеарной точке либрации системы «Солнце — Земля». Принимая эту гипотезу, найдите максимальный суточный параллакс противосияния по эклиптической широте, если место наблюдения расположено на географической широте $\varphi = 45^\circ$.

12. Для того чтобы треугольные точки либрации ограниченной круговой задачи трех тел были устойчивы в первом приближении, необходимо и достаточно, чтобы две конечные массы удовлетворяли неравенству $(m_1 + m_2)^2 / (m_1 m_2) > 27$. Определите соответствующие этому неравенству допустимые положения центра масс системы трех тел.

13. Покажите, что коллинеарные либрационные решения в ограниченной эллиптической задаче трех тел неустойчивы по крайней мере при достаточно малых значениях эксцентриситета орбит притягивающих масс.

§ 5. Классическая задача двух неподвижных центров

Справочные сведения

Дифференциальные уравнения движения. Эта задача состоит в изучении движения пассивно гравитирующей материальной точки P в поле ньютоновского тяготения двух неподвижных притягивающих точек (неподвижных центров).

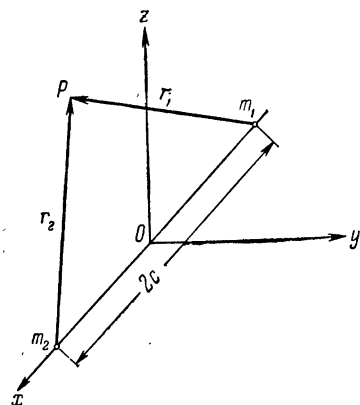


Рис. 7.4.

Обозначим через m_1 и m_2 — притягивающие массы, через $2c$ — расстояние между ними и введем инерциальную прямоугольную систему координат с началом O в середине расстояния между притягивающими центрами, причем ось абсцисс направим вдоль линии центров (рис. 7.4). Дифферен-

циальные уравнения движения относительно введенной системы координат имеют вид

$$\ddot{x} = U'_x, \quad \ddot{y} = U'_y, \quad \ddot{z} = U'_z. \quad (1)$$

Здесь U — силовая функция, определяемая формулой

$$U = \frac{fm_1}{r_1} + \frac{fm_2}{r_2}, \quad (2)$$

в которой

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Регуляризованные уравнения движения. В вытянутых сфероидальных координатах

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} v \cos u, \\ y &= c \operatorname{sh} v \sin u \sin \omega, \\ z &= c \operatorname{sh} v \sin u \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

уравнения движения записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (J \dot{u}) - \sin u \cos u (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{\omega}^2 \operatorname{sh}^2 v) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt} (J \dot{v}) - \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{\omega}^2 \sin^2 u) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial v}, \\ \frac{d}{dt} (\operatorname{sh}^2 v \sin^2 u \cdot \dot{\omega}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где введено обозначение

$$J = \frac{r_1 r_2}{c^2} = \operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u. \quad (6)$$

Имеют место следующие первые интегралы: *интеграл живых сил*

$$J (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \dot{\omega}^2 \operatorname{sh}^2 v \sin^2 u = \frac{2}{c^2} (U + h), \quad (7)$$

интеграл площадей

$$\dot{\omega} \operatorname{sh}^2 v \sin^2 u = A. \quad (8)$$

Через h и A в (7) и (8), как и обычно, обозначены произвольные постоянные.

После введения регуляризирующего времени τ

$$dt = J d\tau, \quad (9)$$

уравнения движения преобразуются к форме

$$u'' = \frac{\partial W}{\partial u}, \quad v'' = \frac{\partial W}{\partial v}, \quad (10)$$

где

$$W = J \left(\frac{1}{c^2} U - \frac{A^2}{2 \operatorname{sh}^2 v \sin^2 u} \right), \quad (11)$$

а штрихом обозначено дифференцирование по τ .

Общее решение. Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{h\lambda^4 + \frac{f(m_1+m_2)}{c^3} \lambda^3 + (C-h)\lambda^2 - \frac{f(m_1+m_2)}{c^3} \lambda - \frac{A^2}{2} - C}} = \sqrt{2}(\tau - \tau_0), \quad (12)$$

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{h\mu^4 + \frac{f(m_1+m_2)}{c^3} \mu^3 + (C+h)\mu^2 - \frac{f(m_1-m_2)}{c^3} \mu + C}} = \sqrt{2}(\tau - \tau'_0), \quad (13)$$

где $\lambda = ch v$, $\mu = \cos u$, а c , τ_0 , τ'_0 — произвольные постоянные.

Литература: основная — [2], [4], дополнительная — [5], [7], [8].

ЗАДАЧИ

1. Материальная точка движется в плоскости под действием сил ньютоновского притяжения к двум неподвижным центрам. Принимая в качестве лагранжевых координат величины

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \quad \mu = \frac{r_1 - r_2}{2c},$$

где r_1 и r_2 — расстояния движущейся точки от притягивающих центров, а $2c$ — расстояние между притягивающими центрами, получите канонические уравнения движения.

2. Докажите, что при достаточно больших по модулю отрицательных значениях полной механической энергии в задаче двух неподвижных центров движущаяся точка будет постоянно находиться в некоторой замкнутой области, содержащей один из притягивающих центров.

3. Рассмотрите движение кометы под действием сил притяжения к Солнцу и Юпитеру, считая Юпитер неподвижным. В начальный момент комета находилась на гелиоцентрическом радиусе-векторе Юпитера и была вдвое ближе к Солнцу, чем Юпитер. Начальная скорость кометы направлена перпендикулярно ее гелиоцентрическому радиусу-вектору.

4. Материальная точка движется под действием сил притяжения к двум неподвижным центрам. Покажите, что задача допускает первый интеграл

$$r_1 \dot{r}_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - 2fc (\mu_1 \cos \vartheta_1 + \mu_2 \cos \vartheta_2) = \text{const},$$

в котором r_1 и r_2 — расстояния до притягивающих центров с массами μ_1 и μ_2 соответственно, а ϑ_1 и ϑ_2 — углы, образуемые радиусами-векторами r_1 и r_2 с линией центров.

5. Считая Землю и Солнце неподвижными, выясните, будет ли Луна спутником Земли или спутником Солнца. Ответьте на аналогичный вопрос о Фобосе, внутреннем спутнике Марса.

6. Докажите справедливость следующего факта, установленного Лежандром:

Пусть A — один из концов большой полуоси эллипса Γ , фокусами которого служат точки F_1 и F_2 . Пусть, далее, известно, что если материальная точка P получит в вершине эллипса A скорость V_1 , то она под действием силы ньютоновского тяготения к некоторой массе m_1 , помещенной в фокусе F_1 , опишет эллипс Γ . Если та же точка P получит в вершине эллипса A скорость V_2 , то она под действием силы притяжения к массе m_2 , помещенной в другом фокусе F_2 , опишет тот же эллипс Γ . Тогда при одновременном действии обеих масс m_1 и m_2 материальная точка P , получив в вершине эллипса A скорость $\sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ (в направлении касательной к эллипсу в точке A), опишет тот же эллипс.

Остается ли это утверждение в силе, если A — произвольная точка эллипса?

7. Докажите теорему Бонне — Егорова:

Пусть одна и та же дуга AB гладкой кривой описывается каждой из n материальных точек P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), имеющей массу m_i , под действием силы F_i , зависящей только от положения материальной точки на кривой. Если V_{i0} — скорость точки P_i в начальной точке A , a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — какие-либо действительные постоянные, причем удовлетворяется условие

$$m_1 a_1 V_{i0}^2 + m_2 a_2 V_{20}^2 + \dots + m_n a_n V_{n0}^2 > 0,$$

то некоторая материальная точка с массой M , имеющая в начальной точке A скорость V_0 , коллинеарную скоростям V_{i0} и подчиненную условию

$$M V_0^2 = m_1 a_1 V_{i0}^2 + m_2 a_2 V_{20}^2 + \dots + m_n a_n V_{n0}^2,$$

под действием силы

$$F = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \dots + a_n F_n$$

опишет ту же дугу AB .

Если дуга AB может оказаться траекторией материальной точки с массой M , движущейся со скоростью V под действием силы

$$F = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \dots + a_n F_n,$$

то в каждой точке дуги AB справедливо равенство

$$M V^2 = m_1 a_1 V_{i0}^2 + m_2 a_2 V_{20}^2 + \dots + m_n a_n V_{n0}^2.$$

8. Докажите: если условие

$$m_1 a_1 V_{i0}^2 + m_2 a_2 V_{20}^2 + \dots + m_n a_n V_{n0}^2 > 0$$

предыдущей задачи не выполнено, то движение материальной точки по дуге AB невозможно.

9. Силовое поле создано двумя неподвижными притягивающими по закону Ньютона центрами A и B с массами m_1 и m_2 соответственно, причем $m_1 + m_2 = 1$, $m_2 < 1/2$. Пользуясь теоремой Бонне — Егорова, выясните, возможны ли в этом поле движения материальной точки любой дуги любой гиперболы с фокусами в A и B .

10. Покажите, что задача двух неподвижных центров допускает решения, которым соответствуют движения по поверхностям вытянутых эллипсоидов вращения, общая ось которых совпадает с линией притягивающих центров, а фокусы находятся в этих центрах. Исследуйте геометрические свойства этих орбит.

11. Пользуясь теоремой Бонне — Егорова, покажите, что материальная точка может описывать эллиптическую орбиту, если в направлении фокусов этой орбиты на точку действуют силы

$$\mu \frac{r^3 + 8a^3}{8a^3 r^2} \quad \text{и} \quad \mu \frac{r'^3 + 8a^3}{8a^3 r'^2},$$

где r и r' — фокальные радиусы-векторы, а μ и a — некоторые постоянные.

12. Исследуйте устойчивость эллиптических орбит по отношению к большой полуоси в классической задаче двух неподвижных центров в предположении, что начальные возмущения не изменяют значений постоянной живых сил и постоянной площадей. Можно ли избавиться от ограничений, накладываемых на начальные возмущения?

§ 6. Предельная задача двух неподвижных центров

Справочные сведения

Первые интегралы уравнений движения. Поместим начало O неподвижной прямоугольной системы координат x, y, z в притягивающий центр с массой m_1 ($m_1 < m_2$), а ось x направим вдоль линии центров. Если движение материальной точки происходит в весьма близкой окрестности начала координат, то силовое поле задачи двух неподвижных центров можно в этом случае аппроксимировать силовым полем, представляющим наложение центрального ньютоновского и однородного силовых полей, что соответствует удалению притягивающего центра большей массы в бесконечность. Силовая функция задачи имеет вид

$$U = \frac{fm_1}{r} + \omega x, \quad (1)$$

где a — постоянная, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В параболических координатах

$$q_1 = \frac{r+x}{2}, \quad q_2 = \frac{r-x}{2}, \quad q_3 = \arctg \frac{y}{z} \quad (2)$$

лагранжиан задачи имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left[(q_1 + q_2) \left(\dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{q_2} \right) + 4q_1 q_2 \dot{q}_3^2 \right] + \frac{fm_1}{q_1 + q_2} + \omega (q_1 - q_2). \quad (3)$$

Соответствующие выписанному лагранжиану уравнения движения имеют два первых интеграла: *интеграл энергии*

$$(q_1 + q_2) \left(\frac{\dot{q}_1^2}{q_1} + \frac{\dot{q}_2^2}{q_2} \right) + 4q_1q_2\dot{q}_3^2 = \frac{2fm_1}{q_1 + q_2} + 2\omega(q_1 - q_2) + 2\alpha_1 \quad (4)$$

и *циклический интеграл (интеграл площадей)*

$$4q_1q_2\dot{q}_3 = \alpha_3. \quad (5)$$

Регуляризованные уравнения движения. С введением регуляризирующего времени τ по формуле

$$dt = (q_1 + q_2) d\tau \quad (6)$$

уравнения движения записываются в виде

$$\frac{d^2q_1}{d\tau^2} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}, \quad \frac{d^2q_2}{d\tau^2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_3}{d\tau} = \frac{\alpha_3(q_1 + q_2)}{4q_1q_2}, \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \omega q_1^3 + \alpha_1 q_1^2 + \frac{fm_1 - \alpha_2}{2} q_1 - \frac{\alpha_2^2}{8}, \\ Q_2 &= -\omega q_2^3 + \alpha_1 q_2^2 + \frac{fm_1 + \alpha_2}{2} q_2 - \frac{\alpha_2^2}{8}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

а α_i ($i=1, 2, 3$) — произвольные постоянные интегрирования.

Общее решение. Общее решение полученных уравнений имеет вид

$$\int \frac{dq_1}{\sqrt{Q_1}} = \sqrt{2}(\tau - \tau_1), \quad \int \frac{dq_2}{\sqrt{Q_2}} = \sqrt{2}(\tau - \tau_2). \quad (9)$$

Предельная задача двух неподвижных центров может быть использована при исследовании движения космического аппарата в сфере действия планеты, при оценке влияния светового давления на движение искусственного спутника и при изучении движения космического аппарата в центральном поле с постоянным вектором реактивного ускорения.

Л и т е р а т у р а: основная — [7].

ЗАДАЧИ

1. Космический аппарат движется в сфере действия Земли. Возмущающее воздействие Солнца, которое в первом приближении считается неподвижным, аппроксимируется силовой функцией предельной задачи двух неподвижных центров

$$U = \frac{fm}{r} + \omega x.$$

Определите значение постоянной ω и вычислите отношение ω/g , где g — гравитационное ускорение создаваемое Землей на расстоянии $r = 10^5$ км.

2. По какой поверхности должна двигаться материальная точка в предельной задаче двух неподвижных центров, чтобы оставалась неизменной: 1) обобщенная координата $q_1 = \frac{1}{2}(r + x)$, 2) обобщенная

координата $q_2 = \frac{1}{2}(r-x)$? В каких пределах могут изменяться координаты q_1, q_2 при всевозможных вещественных значениях прямоугольных координат x, y, z ?

3. На точку, движущуюся в центральном ньютоновском поле, действует реактивная сила, сообщающая ей постоянное по величине и направлению ускорение ω . Используя общее решение предельной задачи двух неподвижных центров, покажите, что при положительном значении полной энергии точки движение всегда будет инфинитным. Докажите, что инфинитные движения возможны и при отрицательных значениях полной энергии.

4. Каким будет движение материальной точки в предельной задаче двух неподвижных центров при равенстве нулю постоянной циклического интеграла? Напишите общее решение задачи в этом случае.

5. Покажите, что в предельной задаче двух неподвижных центров произвольная постоянная α_2 при $\omega = 0$ представляет проекцию вектора Лапласа на ось x . Как выражается α_2 через прямоугольные координаты точки, если начальные условия соответствуют движению по круговой орбите?

6. Составьте функцию Лагранжа для предельного варианта задачи двух неподвижных центров в параболических координатах q_1, q_2, q_3 , связанных с декартовыми x, y, z соотношениями

$$q_1^2 = r + x, \quad q_2^2 = r - x, \quad \operatorname{tg} q_3 = \frac{z}{y},$$

где r — радиус-вектор пассивно гравитирующей точки, проведенный из притягивающего центра.

7. Покажите, что уравнения Лагранжа, описывающие движение пассивно гравитирующей точки с функцией Лагранжа предыдущей задачи, можно привести к виду

$$\frac{d^2 q_i}{d\tau^2} = F_i(q_i), \quad F_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2),$$

$$W = 2r(\alpha_1 - \Pi), \quad r = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2),$$

где α_1 — постоянная энергии, а

$$\Pi = \frac{\alpha_3^2}{2q_1^2 q_2^2} - \frac{2K}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{\omega}{2}(q_3^2 - q_1^2)$$

— измененная потенциальная энергия (ω — постоянное ускорение, α_3 — константа циклического интеграла). Новая независимая переменная τ связана с временем t соотношением

$$d\tau = 2r dt.$$

8. Космический аппарат, первоначально находившийся на круговой кеплеровской орбите радиуса r , стартует с нее под действием реактивной силы, сообщающей ему постоянное по величине и направлению реактивное ускорение ω . Считая, что движение происходит в плоскости x, y , найдите наименьшую величину ускорения, при превышении которой космический аппарат навсегда покидает круговую орбиту.

9. Космический аппарат, стартуя с круговой кеплеровской орбиты радиуса r_0 под действием постоянного по величине и направлению реактивного ускорения ω , должен покинуть центральное тело. Каким должен быть угол α_0 между вектором реактивного ускорения и радиусом-вектором космического аппарата, чтобы осуществить указанный маневр с наименьшей величиной ускорения ω при условии, что движение происходит в неизменной плоскости? Определите предельное значение ω_{\min} при превышении которого космический аппарат покинет притягивающее тело. На какое максимальное расстояние r_{\max} от притягивающего тела может удалиться космический аппарат при $\omega = \omega_{\min}$?

10. Космическому аппарату, движущемуся по круговой кеплеровской орбите радиуса r_0 , в некоторый момент времени сообщается постоянное по величине реактивное ускорение, направленное по радиусу-вектору, проведенному из притягивающего центра. Предполагая, что по отношению к инерциальной системе координат направление вектора ускорения остается неизменным, определите траекторию космического аппарата, если $\omega = g/2$, где g — гравитационное ускорение на исходной круговой орбите.

11. Исследуйте орбитальную устойчивость движения космического аппарата, рассмотренного в предыдущей задаче.

12. Американский ИСЗ «Эхо-1», представляющий собой надувной баллон диаметром 30 м и массой около 70 кг, подвергался заметному влиянию сил светового давления Солнца. Считая в первом приближении Землю неподвижной и предполагая, что спутник запущен в плоскости эклиптики на круговую орбиту радиусом $r_0 = 7 \cdot 10^3$ км, определите максимальное отклонение спутника от круговой орбиты в момент, когда он пересечет прямую, проходящую через центры Земли и Солнца. Примите, что в начальный момент движения радиус-вектор спутника, проведенный из центра Земли, составлял с направлением на Солнце угол π , а световое давление на орбите спутника постоянно и равно $4,5 \cdot 10^{-7}$ км/м². Влиянием тени Земли пренебречь.

13. При условиях предыдущей задачи определите максимально возможное отклонение δr_{\max} спутника от начальной круговой орбиты. Найдите угол между радиусом-вектором максимально удаленной точки возмущенной орбиты и осью x .

14. Спутник, движущийся в плоскости эклиптики, испытывает заметное влияние светового давления Солнца. Используя предельную

задачу двух неподвижных центров, покажите, что наличие земной тени (рис. 7.5) приводит к изменению полной механической энергии спутника E , которое за один виток (начинающийся в точке A и заканчивающийся в точке C) выражается формулой

$$\delta E = \omega (x_B - x_C),$$

где ω — возмущающее ускорение, вызванное действием постоянного светового давления.

15. При каких соотношениях между произвольными постоянными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ предельной задачи двух неподвижных центров возможны движения материальной точки по параболоиду $q_1 = \text{const}$? Напишите уравнение этого параболоида в декартовых координатах при заданных значениях произвольных постоянных. Исследуйте орбитальную устойчивость такого стационарного движения.

вольных постоянных и исследуйте стационарное движение.

16. Какому уравнению должны удовлетворять произвольные постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ предельной задачи двух неподвижных центров, чтобы материальная точка двигалась по параболоиду $q_2 = \text{const}$? Напишите уравнение этого параболоида в декартовой системе координат при заданных значениях произвольных постоянных. Каковы условия орбитальной устойчивости такого стационарного движения?

§ 7. Обобщенная задача двух неподвижных центров

Справочные сведения

Дифференциальные уравнения. Обобщенная задача двух неподвижных центров состоит в исследовании движения материальной точки в поле ньютоновского тяготения двух неподвижных центров с комплексно-сопряженными массами, расположенными на некотором мнимом расстоянии.

Обозначим массы центров через $\frac{m}{2}(1 \pm i\delta)$, а расстояние между ними через $2ci$ ($i = \sqrt{-1}$). Введем инерциальную прямоугольную систему координат x, y, z , ось аппликат которой направим вдоль линии центров, а начало координат O выберем в центре масс притягивающих точек. Переходя к сферическим координатам

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} v \sin u \cos \bar{\omega}, \\ y &= c \operatorname{ch} v \sin u \sin \bar{\omega}, \\ z &= c\delta + c \operatorname{sh} v \cos u, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

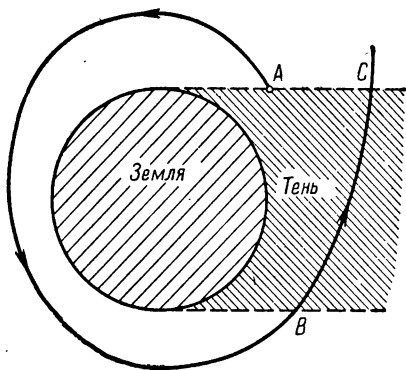


Рис. 7.5.

представим дифференциальные уравнения движения в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (J\dot{u}) + (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - \dot{\omega}^2 \operatorname{ch}^2 v) \sin u \cos u &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt} (J\dot{v}) - (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{\omega}^2 \sin^2 u) \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial v}, \\ \frac{d}{dt} (\dot{\omega} \operatorname{ch}^2 v \sin^2 u) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь силовая функция U равна

$$U = \frac{fm}{c} \frac{\operatorname{sh} v - \delta \cos u}{\operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u}. \quad (3)$$

Уравнения движения допускают следующие первые интегралы: *интеграл живых сил*

$$\frac{c^2}{2} [J(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \dot{\omega}^2 \operatorname{ch}^2 v \sin^2 u] - \frac{fm}{c} \frac{\operatorname{sh} v - \delta \cos u}{\operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u} = h, \quad (4)$$

где $J = \operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u$, и *интеграл площадей*

$$\dot{\omega} \operatorname{ch}^2 v \sin^2 u = c_1. \quad (5)$$

Регуляризованные уравнения движения. Введя регуляризирующее время τ с помощью соотношения

$$dt = J d\tau, \quad (6)$$

после преобразований получим следующую систему уравнений движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\tau^2} &= \frac{\partial W}{\partial u}, \\ \frac{d^2 v}{d\tau^2} &= \frac{\partial W}{\partial v}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$W = \frac{fm}{c^3} (\operatorname{sh} v - \delta \cos u) + J \left(\frac{h}{c^2} - \frac{c_1^2}{2 \operatorname{ch}^2 v \sin^2 u} \right). \quad (8)$$

Первые интегралы этой системы имеют вид

$$\left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 = \frac{2h}{c^2} \cos^2 u - \frac{2fm\delta}{c^3} \cos u - \frac{c_1^2}{\sin^2 u} - 2c_2, \quad (9)$$

$$\left(\frac{dv}{d\tau} \right)^2 = \frac{2h}{c^2} \operatorname{sh}^2 v + \frac{2fm}{c^3} \operatorname{sh} v + \frac{c_1^2}{\operatorname{ch}^2 v} + 2c_2. \quad (10)$$

Здесь c_2 — произвольная постоянная.

Общее решение. Общее решение уравнений движения (7) можно записать в виде

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{-\frac{2h}{c^2} \mu^4 + \frac{2fm\delta}{c^3} \mu^3 + 2 \left(c_2 + \frac{h}{c^2} \right) \mu^2 - \frac{2fm\delta}{c^3} \mu - 2c_2 - c_1^2}} = \tau - \tau_0, \quad (11)$$

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{2h}{c^2} \lambda^4 + \frac{2fm}{c^3} \lambda^3 + 2 \left(c_2 + \frac{h}{c^2} \right) \lambda^2 + \frac{2fm}{c^3} \lambda + 2c_2 + c_1^2}} = \tau - \tau'_0, \quad (12)$$

где $\lambda = \operatorname{sh} v$, $\mu = \cos u$, а τ_0 , τ'_0 — постоянные интегрирования.

Связь с задачей о движении спутника сфероидальной планеты. Обобщенная задача двух неподвижных центров дает в квадратурах решение задачи о движении спутника сфероидальной планеты. Это решение полностью учитывает возмущающее влияние второй и третьей зональных гармоник разложения гравитационного потенциала планеты в ряд по полиномам Лежандра.

Пусть потенциал планеты в планетоцентрической экваториальной системе координат представляется рядом

$$U_{\text{п}} = \frac{fm}{r} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k \left(\frac{z}{r} \right) \right], \quad (13)$$

в котором m — масса планеты, R — ее средний радиус, J_k — некоторые постоянные, а $P_k \left(\frac{z}{r} \right)$ — полином Лежандра k -го порядка.

Сравним этот ряд с разложением потенциала обобщенной задачи двух неподвижных центров в ряд по полиномам Лежандра

$$U = \frac{fm}{r} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k \left(\frac{z}{r} \right) \right], \quad (14)$$

в котором

$$\gamma_k = \frac{c^k}{2} [(1+i\delta)(\delta+i)^k + (1-i\delta)(\delta-i)^k] \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (15)$$

Распорядимся параметрами, входящими в разложение (14) так, чтобы первые три члена в обоих рядах совпадали. Тогда

$$c = R \sqrt{-J_2 - \frac{J_3^2}{4J_2^2}}, \quad \delta = \frac{J_3}{2J_2} \frac{R}{c}. \quad (16)$$

Для Земли величины c и δ можно принять равными

$$c = 209,73 \text{ км}, \quad \delta = -0,035758. \quad (17)$$

Л и т е р а т у р а: основная — [1], дополнительная — [5], [7].

ЗАДАЧИ

1. Считая фигуру Юпитера сфероидальной, найдите приближенное выражение его гравитационного потенциала с помощью потенциала тяготения двух неподвижных центров. Средний радиус Юпитера принять равным 71 375 км, а для коэффициентов второй и третьей зональных гармоник взять значения: $J_2 = -0,01471$, $J_3 = 0,00068$.

2. Решите задачу, аналогичную предыдущей для Сатурна, приняв средний радиус Сатурна равным 60 500 км, а для параметров его гравитационного поля взять значения: $J_2 = -0,01667$, $J_3 = 0,00103$.

3. Напишите дифференциальное уравнение Гамильтона—Якоби для обобщенной задачи двух неподвижных центров в сжатых сфероидаль-

ных координатах ξ , η , ζ , связанных с прямоугольными формулами преобразования:

$$x = c \sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \cos \zeta,$$

$$y = c \sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} \sin \zeta,$$

$$z = c\delta + c\xi\eta.$$

4. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби, полученного в предыдущей задаче, воспользовавшись для этой цели теоремой Штеккеля.

5. Докажите теорему, принадлежащую Е. П. Аксенову, Е. А. Гребникову и В. Г. Демину:

Под действием возмущений от фигуры сфероидальной планеты при соответствующем выборе начальных условий кеплеровское эллиптическое движение преобразуется в движение, происходящее в неограниченной части пространства. Невозмущенные параболические и гиперболические движения ни при каком выборе начальных условий не могут превратиться в ограниченные движения под действием этих возмущений.

6. Используя модель обобщенной задачи двух неподвижных центров, рассмотрите круговые орбиты спутника сфероидальной планеты. Найдите достаточные условия их устойчивости. Покажите, что эти условия выполнены для любых круговых орбит ИСЗ.

7. Покажите, что обобщенная задача двух неподвижных центров допускает решения, которым соответствуют орбиты, целиком лежащие на сжатых эллипсоидах вращения.

8. Исследуйте устойчивость частных решений, найденных в предыдущей задаче, по отношению к эксцентриситету эллипсоида, на котором лежат соответствующие этим решениям орбиты.

9. Покажите, что обобщенная задача двух неподвижных центров допускает частные решения, которым соответствуют движения, происходящие на однополостном гиперboloиде вращения, ось которого совпадает с линией притягивающих центров.

10. Аппроксимируя потенциал тяготения осесимметричной планеты гравитационным потенциалом обобщенной задачи двух неподвижных центров, покажите, что возможны гиперболические движения материальной точки, лежащие в фиксированной меридиональной плоскости.

11. Докажите, что частные решения, найденные в задаче 9, устойчивы по отношению к полуосям гиперboloида, на котором происходит движение, а также к его эксцентриситету при любых числовых значениях указанных величин.

12. Е. П. Аксенов показал, что для движения спутникового типа в обобщенной задаче двух неподвижных центров связь координат со временем устанавливается, подобно тому как и в задаче двух тел, при помощи трансцендентного уравнения, аналогичного уравнению

Кеплера. Приближенно оно может быть записано в виде

$$E - e \sin E - \lambda \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right) = M,$$

где E — аналог эксцентрической аномалии, M — аналог средней аномалии, а e , e , λ — некоторые постоянные, причем e имеет порядок эксцентриситета кеплеровской орбиты, а λ — малая, порядка 0,01 для близких спутников Земли. Обобщив ряд Лагранжа на случай двух малых параметров, найдите решение этого уравнения в виде ряда.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968.
2. Мультон Ф. Р., Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935.
3. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
4. Шарлье К., Небесная механика, пер. с нем., «Наука», 1966.

Дополнительная

5. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», 1971.
6. Балк М. Б., Элементы динамики космического полета, «Наука», 1965.
7. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения, «Наука», 1968.
8. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, «Наука», 1964.
9. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.
10. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, «Наука», 1965.

ГЛАВА VIII

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

§ 1. Возмущающая сила. Возмущающая функция

Справочные сведения

Возмущающая сила. Пусть на материальную точку с массой m наряду с силой $F = -\frac{f m_0 m}{r^3} r$ центрального ньютоновского тяготения действует малая по модулю (по сравнению с $|F|$) сила Φ . Сила Φ называется *возмущающей* *).

Возмущающую силу (ускорение), обычно разлагают на три ортогональные составляющие:

- 1) *радиальную составляющую* S ,
- 2) *трансверсальную составляющую* T ,
- 3) *бинормальную составляющую* W

($W > 0$, если направление W совпадает с положительным направлением оси аппликат).

Иногда компоненту возмущающей силы, лежащую в плоскости орбиты, разлагают на тангенциальную составляющую Φ_τ (Φ_τ считается положительной, если ее направление совпадает с направлением скорости движущейся точки) и нормальную составляющую Φ_n ($\Phi_n > 0$, если она направлена в сторону внутренней главной нормали).

Возмущающая функция. Если возмущающая сила потенциальна, то вводят так называемую *возмущающую* или *пертурбационную* функцию R :

$$\Phi = \text{grad } R. \quad (1)$$

Если источником возмущений является третье тело (материальная точка), то вектор возмущающего ускорения имеет вид

$$\Phi = -f m_B \left(\frac{\Delta}{\Delta^3} + \frac{r_B}{r_B^3} \right), \quad (2)$$

где m_B — масса возмущающего тела, r_B — радиус-вектор возмущающего тела, Δ — вектор с началом в возмущаемом теле и концом в возмущающем теле.

Разложение возмущающей функции в ряд. В теории возмущенного движения возмущающую силу и пертурбационную функцию чаще всего приходится выражать через кеплеровские элементы, например, большую

* Обычно в небесной механике говорят о «возмущающих силах», подразумевая под ними возмущающие ускорения.

полуось a , эксцентриситет e , угловое расстояние перицентра от восходящего узла ω , наклонение i орбиты к основной координатной плоскости, долготу восходящего узла Ω , среднюю аномалию M_0 в эпоху t_0 .

Выражение для пертурбационной функции (возмущающей силы) приходится затем разлагать в тригонометрический ряд по кратным средней аномалии M (или иной угловой переменной, например, эксцентрической аномалии), а коэффициенты Фурье в этом ряде представляются в виде рядов по степеням эксцентриситета и других переменных. При получении разложения пертурбационной функции бывают необходимы ряды для функций от координат кеплеровского эллиптического движения (см. § 3 гл. 4).

Процесс получения разложения пертурбационной функции может быть значительно упрощен, если для разложений функций вида $\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv$, $\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv$ (m, n — целые) использовать специальные таблицы для коэффициентов этих разложений, составленные Кэли*). Извлечение из этих таблиц приведено в приложении к сборнику задач (см. таблицы 2 и 3). Таблица 2 содержит коэффициенты $C_k^{n, m}$ для разложений

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv = C_0^{n, m} + C_1^{n, m} \cos M + C_2^{n, m} \cos 2M + \dots, \quad (3)$$

а таблица 3 содержит коэффициенты $S_k^{n, m}$ для разложений вида

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv = S_1^{n, m} \sin M + S_2^{n, m} \sin 2M + \dots \quad (4)$$

Л и т е р а т у р а: основная — [2] — [4], дополнительная — [6] — [9].

ЗАДАЧИ

1. Выразите радиальную и трансверсальную составляющие возмущающей силы через тангенциальную и нормальную ее составляющие.

2. Космический аппарат движется в центральном ньютоновском поле тяготения под действием малой реактивной тяги, величина и направление которой остаются все время постоянными. Вектор реактивной тяги компланарен плоскости орбиты космического аппарата. Найдите радиальную и трансверсальную составляющие тяги. Предполагая эксцентриситет орбиты малой величиной, получите первые члены разложений этих составляющих в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии. Разложение вести с точностью до квадрата эксцентриситета включительно. Выполните разложения в ряды указанных величин непосредственно и с помощью таблиц Кэли.

3. Ограничиваясь в потенциале тяготения осесимметричной планеты второй зональной гармоникой, выразите возмущающую функцию через оскулирующие кеплеровские элементы. Разложите полученное выражение для возмущающей функции в тригонометрический ряд по кратным средней аномалии. Коэффициенты при тригонометрических функциях вычислите с точностью до вторых степеней эксцентриситета.

4. Ограничиваясь в потенциале тяготения осесимметричной планеты второй зональной гармоникой, выразите возмущающую функцию

*) Cayley A., Tables of the developments of functions in the theory of elliptic motion, Mem. of the Roy. Astron. Soc. 29, 1859, pp. 191 — 306.

через оскулирующие кеплеровские элементы. Найдите частные производные от возмущающей функции по элементам i , ω .

5. Исследуйте составляющую радиального возмущающего ускорения в случае, когда возмущения порождаются третьим телом. Рассмотрите случай, когда квадратом отношения расстояний движущейся точки от притягивающего центра и возмущающего тела допустимо пренебречь. Покажите, что при значениях угла между направлениями из притягивающего центра на возмущаемое и возмущающее тела, равных $54^\circ 44'$, $125^\circ 16'$, $234^\circ 44'$ и $305^\circ 16'$, радиальная составляющая возмущающего ускорения равна нулю.

6. Используя таблицы Кэли, вычислите коэффициенты для первых трех членов ряда Фурье, расположенного по кратным средней аномалии, для функции, равной разности истинной и средней аномалий (*уравнение центра*). Вычисления выполните с точностью до третьей степени эксцентриситета.

7. Разложите фокальный радиус-вектор точки, движущейся по эллиптической кеплеровской орбите, в тригонометрический ряд по кратным средней аномалии, пользуясь таблицами Кэли. Выпишите первые три члена разложения, вычислив коэффициенты этих членов с точностью до третьей степени эксцентриситета.

§ 2. Дифференциальные уравнения возмущенного движения в оскулирующих элементах

Справочные сведения

Дифференциальные уравнения в оскулирующих элементах при непотенциальных возмущениях. Движение материальной точки в центральном ньютоновском поле тяготения при наличии малых возмущающих сил описывается дифференциальными уравнениями относительно оскулирующих элементов орбиты. Принимая в качестве оскулирующих элементов большую полуось орбиты a , эксцентриситет e , долготу восходящего узла Ω , наклонение орбиты к основной плоскости i , аргумент перигентра (угловое расстояние перигентра от восходящего узла) ω , среднюю аномалию M_0 в начальную эпоху t_0 , дифференциальные уравнения движения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2a^2e \sin v \cdot S' + 2a^2pr^{-1}T', \\ \frac{de}{dt} &= p \sin v \cdot S' + p (\cos v + \cos E) T', \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin u}{\sin i} W', \\ \frac{di}{dt} &= r \cos u \cdot W', \\ e \frac{d\omega}{dt} &= -p \cos v \cdot S' + (r+p) \sin v \cdot T' - er \sin u \operatorname{ctg} i \cdot W', \\ e \frac{dM_0}{dt} &= \sqrt{1-e^2} (p \cos v - 2er) S' - \sqrt{1-e^2} (r+p) \sin v \cdot T', \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$S' = \frac{1}{K\sqrt{p}} S, \quad T' = \frac{1}{K\sqrt{p}} T, \quad W' = \frac{1}{K\sqrt{p}} W,$$

а

$$M_0(t) = M_0(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{dM_0}{dt} - n \right) dt.$$

В этих уравнениях r — радиус-вектор движущейся точки, v — ее истинная аномалия, u — аргумент широты, E — эксцентрическая аномалия, p — фокальный параметр, n — среднее движение, а S, T, W — проекции возмущающего ускорения соответственно на направления радиуса-вектора движущейся точки, трансверсаль и нормаль к плоскости орбиты.

В зависимости от специфики задачи вместо приведенной системы оскулирующих элементов употребляются и другие системы. Например, при анализе движения по орбитам, близким к круговым, приведенные уравнения теряют смысл, и в этом случае вместо уравнений для элементов e и ω следует пользоваться уравнениями для элементов Лагранжа

$$h = e \sin \omega, \quad q = e \cos \omega. \quad (2)$$

При рассмотрении орбит с малым наклоением вместо элементов i и Ω следует использовать элементы

$$q_1 = \sin i \sin \Omega, \quad q_2 = \sin i \cos \Omega. \quad (3)$$

Уравнения Лагранжа в оскулирующих элементах. Пусть возмущающая сила Φ задается пертурбационной функцией R . Тогда дифференциальные уравнения в оскулирующих элементах принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial e} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{na^2} \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \pi &= \omega + \Omega, \\ e &= \pi + M_0(t), \end{aligned}$$

причем последняя величина представляет собой среднюю долготу эпохи. Эти уравнения называются *уравнениями Лагранжа*.

Каноническая форма уравнений возмущенного движения. Если существует пертурбационная функция, то уравнениям возмущенного движения можно придать каноническую (гамильтонову) форму. Соот-

ветствующие оскулирующие элементы называются каноническими элементами. Примером системы канонических элементов служат элементы Делоне

$$\left. \begin{aligned} L &= K \sqrt{a}, & l &= n(t - T), \\ G &= K \sqrt{a(1 - e^2)}, & g &= \pi - \varrho, \\ H &= K \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i, & h &= \varrho. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения возмущенного движения относительно канонических элементов Делоне записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial H}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причем гамильтониан R' определяется формулой

$$R' = \frac{K^2}{2L^2} + R. \quad (7)$$

Литература: основная — [1] — [5], дополнительная — [6] — [10].

ЗАДАЧИ

1. При малых значениях оскулирующего эксцентриситета в дифференциальных уравнениях для элементов e и ω возникают особенности, и применение этих уравнений становится затруднительным. Введите новые оскулирующие элементы

$$h = e \sin \omega, \quad q = e \cos \omega$$

и составьте для них дифференциальные уравнения в предположении, что возмущающие силы не обладают силовой функцией. Убедитесь в пригодности этих уравнений для анализа возмущенного движения при малых значениях эксцентриситета.

2. При малых значениях эксцентриситета в дифференциальных уравнениях для элементов l и ϱ возникают особенности и применение этих уравнений становится затруднительным. Введите новые оскулирующие элементы

$$q_1 = \operatorname{tg} l \sin \varrho, \quad q_2 = \operatorname{tg} l \cos \varrho$$

и составьте для них дифференциальные уравнения в предположении, что возмущающие силы обладают силовой функцией.

3. Возмущаемая материальная точка движется в сопротивляющейся среде. Сила сопротивления коллинеарна вектору скорости точки. Найдите дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов $a, e, l, \omega, \varrho, M_0$. Покажите, что сила сопротивления не изменяет положения плоскости оскулирующей орбиты.

4. Известны составляющие возмущающего ускорения по касательной и нормали к орбите. Составьте дифференциальные уравнения для возмущенных значений эксцентрисической и истинной аномалий.

5. К движущейся в центральном ньютоновском поле сил материальной точке приложена тангенциальная возмущающая сила, направление которой совпадает с направлением скорости. Покажите, что она вызывает вращение линии апсид в прямом направлении в течение первой половины обращения ($0 \leq v \leq \pi$) и в обратном направлении в течение второй половины ($\pi \leq v \leq 2\pi$).

6. Покажите, что тангенциальная возмущающая сила не влияет на эксцентриситет оскулирующей орбиты.

7. Покажите, что мгновенные возмущающие силы, направленные по нормали к оскулирующему эллипсу и приложенные в его перигентре и апоцентре, вызывают равные, но противоположно направленные повороты линии апсид, если силы равны по величине, но противоположны по направлению.

8. Покажите, что нормальная возмущающая сила вызывает наибольшие возмущения в эксцентриситете вблизи перигентра и апоцентра орбиты.

9. В теории движения искусственных спутников нередко бывает необходимо знать возмущенные значения перигейного r_p и апогейного r_a расстояний орбиты спутника. Используя проекции возмущающего ускорения S, T , составьте дифференциальные уравнения, определяющие указанные элементы.

§ 3. Возмущенное движение искусственного спутника

Справочные сведения

Возмущения в движении спутника. На движение искусственных спутников влияют различные возмущающие силы. Наиболее сильное возмущающее влияние на близкие к планете искусственные спутники оказывают силы, обусловленные фигурой планеты и сопротивлением ее атмосферы.

Возмущенное движение искусственного спутника будет описываться одной из систем дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах, приведенных в § 2, если для составляющих возмущающего ускорения взять надлежащие выражения.

Интегрирование уравнений движения выполняется методом последовательных приближений, причем в начальном приближении в правые части уравнений для оскулирующих элементов подставляются невозмущенные кеплеровские значения соответствующих величин.

В процессе интегрирования уравнений для оскулирующих элементов могут встретиться *возмущения (неравенства)* в выражениях для элементов трех типов:

1) *периодические возмущения* вида

$$A \sin(kt + \delta),$$

где A, k, δ — постоянные величины;

2) вековые возмущения вида

$$At^k,$$

где A, k — постоянные величины;

3) смешанные возмущения вида

$$At^k \sin(vt + \delta),$$

где A, k, v, δ — некоторые постоянные.

Возмущения от сжатия планеты. Ограничиваясь в потенциале тяготения осесимметричной планеты второй зональной гармоникой, будем иметь

$$V = \frac{K}{r} \left\{ 1 + J_2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (1)$$

где K — гравитационный параметр планеты, J_2 — постоянная, зависящая от сжатия планеты, R_0 — средний радиус планеты, r — планетоцентрический радиус-вектор спутника, φ — его планетоцентрическая широта.

Основные вековые возмущения от сжатия возникают в долготе восходящего узла и аргументе перицентра спутника. Они определяются следующими формулами:

$$\dot{\Omega} = \frac{3J_2}{2} \sqrt{\frac{K}{a^3}} \left(\frac{R_0}{P} \right)^2 \cos i, \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = -3J_2 \sqrt{\frac{K}{a^3}} \left(\frac{R_0}{P} \right)^2 \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right). \quad (3)$$

Возмущения от сопротивления атмосферы. Вызываемое силой аэродинамического сопротивления атмосферы возмущающее ускорение спутника направлено противоположно скорости и по модулю равно

$$\Phi = \frac{1}{2} c s \rho V^2, \quad (4)$$

где c — коэффициент аэродинамического сопротивления, s — площадь миделева сечения, ρ — плотность атмосферы, V — скорость спутника (относительно атмосферы).

Основные возмущения от сопротивления атмосферы возникают в элементах a, r_{II}, T . Приближенные выражения для изменения этих элементов за один оборот спутника даются следующими формулами:

$$\delta a = -4\pi c r_{cp} a^2 \left[1 + \frac{v^2}{4} + \frac{v^4}{64} + \dots + ev \left(1 + \frac{v^2}{8} + \dots \right) \right], \quad (5)$$

$$\delta r_{II} = -4\pi c r_{cp} a^2 (1-e) \left[1 - \frac{v}{2} + \frac{v^2}{4} - \frac{v^3}{16} + \frac{v^4}{64} - \dots \right. \\ \left. \dots - e \left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2} + \frac{3v^2}{16} - \frac{v^3}{16} + \frac{5v^4}{384} + \dots \right) \right], \quad (6)$$

$$\delta P = -\frac{12\pi^2}{\sqrt{K}} c r_{cp} a^{3/2} \left[1 + \frac{v^2}{4} + \frac{v^4}{64} + \dots + ev \left(1 + \frac{v^2}{8} + \frac{v^3}{192} + \dots \right) \right], \quad (7)$$

где $v = \frac{ae}{H}$, причем H обозначает высоту однородной атмосферы.

Литература: основная — [1], [5], дополнительная — [6], [10].

ЗАДАЧИ

1. Найдите первый (постоянный) член разложения в ряд Фурье по кратным средней аномалии возмущающей функции, определяемой второй гармоникой в формуле (1). Покажите, что «осредненная» возмущающая функция не вызывает вековых возмущений в большой полуоси, эксцентриситете и наклонении орбиты.

2. Орбита американского спутника Земли «Авангард-1», запущенного в марте 1958 г., была наклонена к плоскости земного экватора под углом 34° . Его минимальная высота над земной поверхностью составляла 660 км, а максимальная высота равнялась 3970 км. Аргумент перигея в полдень 17 марта 1958 г. был равен 129° . Учитывая из факторов, возмущающих движение спутника, только сжатие Земли, дайте прогноз, каким примерно должен был оказаться аргумент перигея 12 марта 1959 г.

3. Средняя высота спутника над земной поверхностью равна 500 км, орбита наклонена к плоскости экватора под углом в 45° . Определите вековые возмущения в восходящем узле и в аргументе перигея орбиты спутника, вызванные второй зональной гармоникой потенциала тяготения Земли.

4. Американский спутник «Эксплорер-7» (1959 г.) имел в некоторый момент следующие элементы орбиты: большая полуось $a = 7200$ км, эксцентриситет $e = 0,038$ и наклонение $i = 50^\circ,33$. Вычислите суточную скорость изменения долготы восходящего узла и аргумента перигея для этого спутника.

5. Спустя некоторое время после запуска второй советский ИСЗ (1957 г.) имел следующие элементы орбиты:

$$a = 1,13 R_z, \quad e = 0,09, \quad i = 65^\circ,3.$$

С какой угловой скоростью вращалась плоскость орбиты спутника вокруг земной оси? Какова была средняя угловая скорость вращения линии апсид?

6. Для каких орбит спутника сжатой планеты при постоянных значениях большой полуоси и эксцентриситета вековые возмущения первого порядка в долготы восходящего узла и аргументе перигея принимают экстремальные значения?

7. Какими должны быть элементы оскулирующей орбиты спутника, чтобы вековые возмущения в ω и Ω от второй зональной гармоники силового поля сжатой планеты были одинаковы?

8. Орбита искусственного спутника Земли характеризуется следующими значениями оскулирующих кеплеровских элементов в некоторый момент времени:

$$\begin{aligned} a &= 1,5 R_z, & e &= 0,2, & M_0 &= 0^\circ, \\ i &= 30^\circ, & \Omega &= 45^\circ, & \omega &= 60^\circ, \end{aligned}$$

где M_0 — средняя аномалия в эпоху, R_0 — экваториальный радиус Земли. Определите значение этих элементов через 100 оборотов спутника, учитывая лишь вековые возмущения первого порядка, вызванные второй зональной гармоникой поля тяготения Земли.

9. В один из моментов времени эксцентриситет, период и наклонение орбиты американского спутника «Авангард-2» были соответственно равны 0,166; 126^м и 32°,9. Учитывая лишь вековые возмущения первого порядка, вызванные второй зональной гармоникой поля тяготения Земли, определите, с какой скоростью и в каком направлении перемещался восходящий узел оскулирующей орбиты. С какой скоростью и в каком направлении перемещался перигей орбиты?

10. Орбита американского спутника Земли «1957 β_2 » в декабре 1957 г. характеризовалась следующими значениями оскулирующих элементов: $a = 1,13 R_0$, $e = 0,868$, $i = 65^\circ,3$, а $\dot{\omega} = -2,75$ град/сутки, где R_0 — экваториальный радиус Земли. Подсчитайте на основании приведенных данных значение коэффициента J_2 при второй зональной гармонике земного потенциала тяготения.

11. Период обращения первого советского искусственного спутника Земли в начале октября 1957 г. составлял около 96^м и ежедневно убывал примерно на 3^м. На сколько примерно убывала ежедневно большая полуось орбиты спутника?

12. По данным, опубликованным в печати 9 ноября 1957 г., ракета-носитель первого ИСЗ имела перигей на высоте 210 км, а апогей — на высоте 695 км над поверхностью Земли. Суточное уменьшение периода обращения составляло 6^м,3. Дайте прогноз вероятной даты падения этой ракеты на Землю.

13. С помощью управляющей силы Φ искусственный спутник удерживается на круговой орбите, концентрической с одной из параллелей планеты (рис. 8.1); при этом управляющая сила все время остается перпендикулярной плоскости орбиты. При заданной планетоцентрической широте спутника φ определите эксцентриситет и истинную аномалию для соответствующей оскулирующей орбиты. Массу спутника считать неизменной.

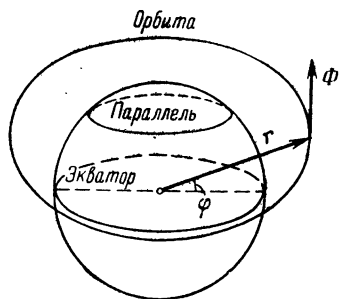


Рис. 8.1.

14. Космический аппарат, первоначально находившийся на эллиптической кеплеровской орбите с эксцентриситетом e_0 , с помощью управляющей силы, приложенной в точке с истинной аномалией $\nu = \pi/2$, переводится на новую траекторию. Программа изменения управляющей силы такова, что величина и направление скорости космического аппарата не претерпевают изменений как в начальный

момент приложения управляющей силы, так и во все последующее время. Считая массу аппарата неизменной, определите его абсолютную траекторию в полярной системе координат, эксцентриситет оскулирующей орбиты, а также полярный угол φ (отсчитываемый от точки включения управляющей силы), при котором космический аппарат приобретает вторую космическую скорость.

15. Космический аппарат, движущийся в центральном ньютоновском поле по круговой орбите радиуса r , испытывает еще неизменное по величине реактивное ускорение ω , постоянно направленное на притягивающий центр. При каких значениях ω оскулирующая орбита космического аппарата будет гиперболой?

16. Покажите, что если на спутник, движущийся в центральном ньютоновском поле, действует еще постоянное по модулю радиальное возмущающее ускорение, то фокальный параметр орбиты остается неизменным.

17. На спутник, движущийся в центральном ньютоновском поле, действует возмущающая сила, сообщающая ему постоянное по модулю нормальное ускорение. Покажите, что большая полуось оскулирующего эллипса остается постоянной.

§ 4. Способ сфер действия

Справочные сведения

Сфера действия. При проектировании орбит широко используется приближенная методика расчета возмущенного движения космического аппарата, основанная на введенном Лапласом понятии «сферы действия».

Рассмотрим гравитационное поле двух притягивающих точечных тел P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 , $m_1 \ll m_2$. Сначала примем тело P_1 за центральное и обозначим создаваемое им гравитационное ускорение в произвольной точке пространства через F_1 , а возмущающее ускорение, вызванное вторым телом в этой же точке пространства, обозначим через R_1 . Примем затем второе тело P_2 за центральное, а тело P_1 — за возмущающее и обозначим гравитационное ускорение центрального тела и возмущающее ускорение соответственно через F_2 и R_2 .

Тогда *сферой действия тела P_1 относительно тела P_2* назовем ту область пространства, содержащую тело P_1 , которая ограничена поверхностью

$$\frac{R_1}{F_1} = \frac{R_2}{F_2}. \quad (1)$$

Приближенно «сфера действия» можно считать шаром радиуса

$$r_d = a \sqrt[5]{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}, \quad (2)$$

где a — расстояние между телами P_1 и P_2 .

Сфера тяготения. *Сферой тяготения тела P_1 относительно тела P_2* называется область пространства, внутри которой притяжение тела P_1 сильнее притяжения тела P_2 , т. е.

$$F_1 > F_2. \quad (3)$$

«Сфера тяготения» действительно представляет собой сферу (так называемая *сфера Аполлония*), радиус которой равен

$$r_T = a \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad (4)$$

а центр находится на продолжении отрезка P_1P_2 на расстоянии u_T от точки P_2 :

$$u_T = \frac{am_1}{m_2 - m_1}. \quad (5)$$

Методика приближенного расчета траекторий. Для решения задачи о возмущенном движении материальной точки в поле тяготения двух точечных тел P_1 и P_2 поступают следующим образом. При расчете движения внутри сферы действия тела P_1 пренебрегают притяжением к телу P_2 , а вне этой сферы пренебрегают притяжением тела P_1 .

Аналогично поступают и в том случае, когда материальная точка движется под действием сил притяжения нескольких тел. В частности, при расчете траекторий межпланетного перелета пренебрегают притяжением Солнца внутри сфер действия планет и притяжением планет вне их сфер действия.

Третья космическая скорость. Под *третьей космической скоростью* понимают ту минимальную планетоцентрическую скорость, которую должен иметь космический аппарат близ поверхности планеты для того, чтобы он мог удалиться на любое сколь угодно большое расстояние от Солнца.

Эту скорость можно вычислить по приближенной формуле

$$W_3 = \sqrt{W_1^2 + (W_2 - W)^2}, \quad (6)$$

в которой W_1 и W_2 — соответственно круговая и параболическая гелиоцентрические скорости в какой-либо точке орбиты планеты, а W — параболическая скорость у поверхности планеты.

Л и т е р а т у р а: основная — [1], [4], дополнительная — [6].

ЗАДАЧИ

1. Считая, что Земля обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите с большой полуосью $149,6 \cdot 10^6$ км и эксцентриситетом 0,016751, вычислите радиус сферы действия и радиус сферы тяготения Земли по отношению к Солнцу в моменты, когда Земля проходит через перигелий и афелий. Отношение массы Земли к массе Солнца принять равным $1/330\,000$. Числовые значения радиусов сферы тяготения и сферы действия получите в километрах и астрономических единицах.

2. Вычислите наименьший и наибольший радиусы сферы действия и сферы тяготения Луны по отношению к Солнцу. Гелиоцентрическую орбиту Луны считать эллипсом с большой полуосью $149,6 \cdot 10^6$ км и эксцентриситетом 0,016751. Отношение массы Луны к массе Солнца принять равным $1/27\,133\,500$.

3. Вычислите наименьший и наибольший радиусы сферы действия и сферы тяготения для Луны относительно Земли. Большую полуось геоцентрической эллиптической орбиты Луны принять равной $384\,400$ км, эксцентриситет — 0,0549, отношение масс Луны и Земли — $1/81,375$.

4. Космическая ракета стартует на высоте 230 км над поверхностью Земли с параболической скоростью, направленной параллельно земной поверхности. Какую геоцентрическую скорость V_0 будет она иметь на границе сферы действия Земли (относительно Солнца)? Сколько времени займет этот перелет?

5. Вычислите третью космическую скорость относительно Марса, Меркурия и Нептуна.

6. Какую минимальную начальную геоцентрическую скорость следует сообщить космической ракете на высоте 230 км над земной поверхностью параллельно этой поверхности для того, чтобы она могла упасть на Солнце? Диаметр Солнца принять равным $1,4 \cdot 10^6$ км. Притяжение Земли учитывать внутри ее сферы действия (относительно Солнца) и пренебречь им вне этой сферы. Вычислите, кроме того, сколько времени будет «падать» ракета на Солнце.

7. Решите предыдущую задачу в предположении, что Солнце представляет собой материальную точку, масса которой совпадает с массой Солнца.

8. Планируется запуск автоматической межпланетной станции (АМС) к орбите Марса. Отсечка последнего двигателя, разгоняющего станцию, должна произойти на расстоянии 6800 км от центра Земли. Величина и направление геоцентрической скорости V_0 АМС в этот момент должны быть выбраны таким образом, чтобы АМС после выхода из сферы действия Земли двигалась по орбите, касающейся орбит Земли и Марса. Последние две для простоты считаются компланарными концентрическими окружностями, имеющими радиусы $150 \cdot 10^6$ км и $228 \cdot 10^6$ км соответственно. Найдите величину геоцентрической скорости V_0 , необходимой для такого перелета.

9. Согласно одному из вариантов посылки АМС к Марсу пассивный участок ее траектории должен начаться на расстоянии 6800 км от центра Земли. Получив в начале пассивного участка геоцентрическую скорость V_0 , АМС должна при выходе из сферы действия Земли иметь гелиоцентрическую параболическую скорость, направленную по касательной к земной орбите. Какую скорость V_0 должна иметь АМС в момент отсечки последнего двигателя? Через какое время АМС достигнет орбиты Марса? При решении задачи принять те же упрощающие допущения, что и в задаче 8.

10. АМС запущена к Венере 12 февраля 1961 г. *). АМС стартовала с ИСЗ, обращающегося вокруг Земли по круговой орбите радиуса $\rho = 6630$ км, получив скорость, превышающую местную параболическую скорость на $0,66$ км/сек. 12 февраля в 12^h по московскому времени АМС находилась на расстоянии 126 300 км от

*) Ниже приводятся данные для некоторой гипотетической АМС; данные подобраны так, чтобы траектория этой воображаемой АМС была достаточно близка к траектории реальной советской АМС, запущенной к Венере в феврале 1961 г.

поверхности Земли. При выходе из сферы действия Земли АМС имела гелиоцентрическую скорость $27,6 \text{ км/сек}$. По этим данным вычислите:

- а) момент старта АМС с борта ИСЗ;
- б) эксцентриситет и большую полуось гелиоцентрической орбиты АМС; угловую дальность между точкой выхода АМС из сферы действия Земли и точкой входа АМС в сферу действия Венеры;
- в) дату встречи АМС с Венерой (с точностью до 1—2 суток).

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Балк М. Б., Элементы динамики космического полета, «Наука», 1965.
2. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, «Наука», 1968.
3. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
4. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, «Наука», 1965.
5. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», 1965.

Дополнительная

6. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», 1971.
7. Мультон Ф. Р., Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935.
8. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.
9. Шарлье К., Небесная механика, пер. с нем., «Наука», 1966.
10. Эскобал П., Методы определения орбит, пер. с англ., «Мир», 1970.

ГЛАВА IX РАКЕТОДИНАМИКА

§ 1. Механика точки переменной массы

Справочные сведения

Уравнение Мещерского. Во многих практически важных для космонавтики задачах динамики тела переменной массы (запуск многоступенчатой ракеты, движение космического аппарата на активном участке траектории, движение спутника, стабилизируемого на орбите при помощи управляющих моментов и т. д.) можно исследовать движение центра масс тела независимо от движения последнего относительно центра масс, не внося при этом существенных погрешностей в общий анализ движения. Движение центра масс в этом случае подчиняется *уравнению Мещерского* для точки переменной массы

$$M \frac{dV}{dt} = F + (u - V) \frac{dM}{dt}. \quad (1)$$

Здесь M — масса точки (тела), являющаяся некоторой функцией времени t (иногда M записывают в виде $M(t) = M_0 m(t)$, где M_0 — начальная масса точки, а $m(t)$ — функция времени, определяющая закон изменения массы), V — скорость точки в выбранной инерциальной системе координат, F — главный вектор внешних сил, приложенных к телу, u — абсолютная скорость отбрасываемых (или присоединяющихся) частиц. Величина

$$\Phi = V_r \frac{dM}{dt}, \quad (2)$$

где $V_r = u - V$, представляет собой *реактивную силу (тягу)*, действующую на точку. Для большого класса задач ракетодинамики допустимо пользоваться *гипотезой Циолковского* о постоянстве относительной скорости V_r истечения газов реактивной струи.

Величина

$$\omega = \frac{\Phi}{M} = V_r \frac{d}{dt} (\ln M) \quad (3)$$

представляет собой *реактивное ускорение* точки, а вектор $n = \omega/g$, где g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли, — *перегрузку*, обусловленную реактивным ускорением. Проектируя n на ту или иную ось, получаем перегрузку в заданном направлении.

Формула Циолковского. Если предположить, что движение точки прямолинейное и начинается из состояния покоя, а внешние силы отсутствуют (иногда говорят, что движение происходит в «бессилово поле»), то интегрирование уравнения (1) приводит к формуле Циолковского

$$V_k = V_r \ln \frac{M_0}{M_k}, \quad (4)$$

определяющей скоростью ракеты в момент выгорания запаса топлива (*рабочего тела*), $M_T = M_0 - M_K$ (M_K — конечная масса ракеты). Эту скорость называют *характеристической*, а отношение $z = M_0/M_K$ — *числом Циолковского*.

Литература: основная — [2], дополнительная — [4], [5], [7].

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что при линейном законе изменения массы $M = M_0(1 - \alpha t)$ точка движется под действием постоянной реактивной силы, а при экспоненциальном законе $M = M_0 e^{-\alpha t}$ — с постоянным реактивным ускорением. Определите ускорение точки ω в первом случае и тягу Φ во втором. Скорость истечения газов V_r и параметр α считать постоянными.

2. Ракета совершает прямолинейное движение в бессилом поле. Масса ракеты монотонно убывает. Как изменяется кинетическая энергия ракеты? Скорость истечения газов V_r считать постоянной, а начальную скорость ракеты равной нулю.

3. При условии предыдущей задачи определите, как изменяется количество движения ракеты.

4. Покажите, что гипотеза Циолковского о постоянстве относительной скорости истечения газов вытекает из гипотезы пропорциональности освобождаемой кинетической энергии ΔT газов их массе ΔM .

5. Ракета движется в центральном силовом поле при экспоненциальном законе изменения ее массы $M = M_0 e^{-\alpha t}$ и неизменном направлении реактивной силы. Покажите, что полная механическая энергия ракеты и проекция ее момента количества движения относительно притягивающего центра на направление реактивной силы, отнесенные к массе ракеты, остаются постоянными. Считать, что скорость истечения газов не меняется.

6. Насколько изменится характеристическая скорость одноступенчатой ракеты, имеющей число Циолковского $z = 5$, если ее запас топлива увеличить на $\epsilon = 5\%$?

7. Вес топлива американской одноступенчатой ракеты «Блу Стрик» равен $88 \cdot 10^3$ кг, время горения 18 сек, а скорость истечения газов $2,49$ км/сек. Считая расход топлива постоянным, определите реактивную тягу каждого из двух двигателей ракеты.

8. Масса точки, движущейся в центральном ньютоновском поле, изменяется по закону $M = M_0(1 - \alpha t)^{-1}$ (α — положительная постоянная). Определите движение точки, считая, что абсолютная скорость присоединяющихся частиц равна нулю.

9. Составьте дифференциальное уравнение прямолинейного восходящего движения ракеты в однородном поле тяжести. Масса ракеты изменяется со временем по закону $M = M_0 m(t)$. Силу сопротивления атмосферы считать заданной функцией высоты y и скорости \dot{y} : $R = R(y, \dot{y})$, а скорость истечения газов V_r — постоянной.

10. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение движения предыдущей задачи в предположении, что масса ракеты изменяется по закону $M = M_0(1 - \alpha t)$ (α — положительная постоянная), а старт происходит с поверхности Луны с нулевой начальной скоростью. Определите высоту подъема ракеты через 50 сек после старта, если скорость истечения $V_r = 2000$ м/сек и $\alpha = 0,01$ сек⁻¹.

11. Масса ракеты, совершающей вертикальное восходящее движение в однородном поле тяжести Земли, изменяется по экспоненциальному закону $M = M_0 e^{-\alpha t}$ (α — положительная постоянная). Для заданного числа Циолковского z определите максимальную высоту подъема ракеты, предполагая, что начальная ее скорость у поверхности Земли равна нулю. Сопротивлением атмосферы пренебречь. Скорость истечения газов считать постоянной.

12. При движении ракеты в атмосфере с большой скоростью сила аэродинамического сопротивления во много раз превышает вес ракеты, в связи с чем последним можно пренебречь. Считая траекторию ракеты прямолинейной, а ее массу изменяющейся по закону $M = M_0(1 - \alpha t)$ (α — положительная постоянная), определите закон изменения скорости ракеты со временем. Силу аэродинамического сопротивления Q принять равной kV^2 ($k = \text{const}$), а начальную скорость V_0 отличной от нуля. Скорость истечения газов V_r считать постоянной.

13. В ряде случаев в теории запуска ракет и искусственных спутников Землю допустимо считать плоской, а поле сил тяжести однородным. При этих предположениях составьте дифференциальные уравнения движения ракеты в вертикальной плоскости в проекциях на естественные оси. На ракету действует тангенциальная реактивная тяга, а масса M изменяется по закону $M = M_0 \exp\left(-\frac{w}{V_r} t\right)$, где M_0 — начальная масса, V_r — постоянная скорость истечения газов. Сопротивлением земной атмосферы пренебречь. Проинтегрируйте дифференциальные уравнения движения, перейдя к новой независимой переменной $z = \text{tg} \frac{\psi}{2}$, где ψ — угол между вертикалью и касательной к траектории.

14. Ракета движется в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести под действием тангенциальной реактивной силы, создающей постоянную перегрузку n . Найдите дальность L и высоту ракеты в момент, когда ее скорость становится горизонтальной. В начальный момент $H(0) = 0$, $L(0) = 0$, $V(0) = V_0$, $\psi(0) = \psi_0$, где H , L , V , ψ — высота, дальность, скорость и угол наклона траектории к вертикали соответственно. Сопротивлением атмосферы пренебречь. Скорость истечения газов считать постоянной.

15. Запуск искусственного спутника на орбиту производится с помощью ракеты-носителя, развивающей постоянное по модулю тангенциальное реактивное ускорение w . Считая, что движение про-

исходит в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести, определите дальность L_a и высоту H_a ракеты в конце активного участка. Известно, что в конце активного участка она приобретает горизонтальную скорость V_a . Вычислите значения указанных величин для $\omega = 3g$ и $V_a = 8 \text{ км/сек}$, полагая $g = 10 \text{ м/сек}^2$, $H_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, где H_0 и ψ_0 — соответственно высота и угол наклона траектории к вертикали в начальный момент движения. Скорость истечения газов V_r считать постоянной.

16. При условиях предыдущей задачи определите число Циолковского z как функцию продольной перегрузки n , создаваемой тангенциальной тягой, считая, что к концу активного участка выгорает все топливо, имеющееся в ракете. Вычислите значения z для $V_a = 8 \text{ км/сек}$, $V_r = 4 \text{ км/сек}$ и $n = 2; 3; 4$.

17. Космический аппарат совершает посадку на Луну с круговой селеноцентрической орбиты, причем посадка производится посредством включения тормозной установки, работающей непрерывно до момента прилунения и сообщающей космическому аппарату постоянное по модулю тангенциальное реактивное ускорение ω . Определите потребное значение продольной «перегрузки» $n_L = \omega/g_L$ (g_L — ускорение силы тяжести на поверхности Луны), в зависимости от высоты H селеноцентрической орбиты для осуществления мягкой посадки, предполагая, что движение происходит в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести. Скорость истечения газов постоянна.

§ 2. Расчет многоступенчатых ракет

Справочные сведения

Характеристики многоступенчатой ракеты. Для снижения начального веса ракет К. Э. Циолковским была предложена идея о *составной*

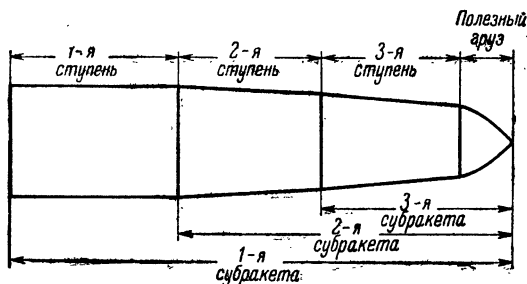


Рис. 9.1.

(многоступенчатой) ракете. Схема многоступенчатой (трехступенчатой) ракеты изображена на рис. 9.1. Характерными весами такой ракеты являются:

G — вес полезного груза, заключенного в n -й субракете,

P_i — вес i -й субракеты,

Q_i — вес топлива i -й ступени,

q_i — «сухой» вес i -й ступени (суммарный вес порожних баков, несущей конструкции, двигателей, трубопроводов и тому подобных агрегатов, находящихся в i -й ступени).

При расчете многоступенчатых ракет вводят так называемую *конструктивную характеристику* i -й ступени s_i , определяемую формулой

$$s_i = \frac{Q_i + q_i}{q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и характеризующую степень конструктивного совершенства i -й ступени ракеты.

Введем еще *относительный вес* i -й ступени субракеты λ_i :

$$\lambda_i = \frac{P_i}{P_{i+1}},$$

а также относительный вес всей многоступенчатой ракеты $\Lambda = P_1/G$. Очевидно,

$$\Lambda = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Наконец, третьей важной характеристикой составной ракеты является *число Циолковского* z_i i -й субракеты

$$z_i = \frac{P_i}{P_i - Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Основные расчетные формулы. Величины s_i , λ_i и z_i удовлетворяют одному из трех соотношений:

$$s_i = \frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i - z_i} z_i, \quad \lambda_i = \frac{s_i - 1}{s_i - z_i} z_i, \quad z_i = \frac{\lambda_i s_i}{\lambda_i + s_i - 1} \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Полный вес многоступенчатой ракеты найдется по формуле

$$P_1 = G \prod_{i=1}^n z_i \frac{s_i - 1}{s_i - z_i}.$$

Если конструктивные характеристики и числа Циолковского одинаковы для всех ступеней, то, обозначая их соответственно через s и z , получим

$$P_1 = G z^n \left(\frac{s-1}{s-z} \right)^n.$$

Величину

$$V_{\text{хар}} = \sum_{i=1}^n V_{ri} \ln z_i,$$

где V_{ri} — скорость истечения газов i -й ступени *), называют *суммарной характеристической скоростью многоступенчатой ракеты*. Для одинаковых чисел $z_i = z$ и одинаковых $V_{ri} = V_r$ получим

$$V_{\text{хар}} = V_r n \ln z.$$

*) Вместо скорости истечения газов V_r иногда пользуются величиной $J = V_r/g$, называемой *удельным импульсом* ракетного двигателя (g — ускорение силы тяжести).

Формулу для полного веса ракеты можно теперь записать в виде

$$P_1 = Ge^{V_{\text{хар}}/V_r} \left(\frac{s-1}{s-e^{V_{\text{хар}}/V_r}} \right)^n.$$

Л и т е р а т у р а: основная — [1], [2], [4], дополнительная — [6] — [8].

ЗАДАЧИ

1. Одноступенчатая ракета движется прямолинейно в бессиловом поле. К моменту полного выгорания топлива ее скорость V_a достигает значения 3800 м/сек. Скорость истечения газов равна 2400 м/сек. Определите число Циолковского для этой ракеты.

2. Выведите формулу Циолковского для одноступенчатой ракеты при заданных значениях коэффициента конструкции s и отношения $\alpha = q/G$ (G — вес полезной нагрузки, а q — суммарный вес конструкции).

3. Одноступенчатая и двухступенчатые ракеты имеют одинаковую скорость истечения газов V_r и обеим ракетам нужно достичь одной и той же скорости V_a в конце активного участка траектории. Пренебрегая внешними силами и считая, что обе ракеты имеют одинаковую конструктивную характеристику $s=4$ и несут одинаковую полезную нагрузку $G=1000$ кг, определите начальный вес P_2 двухступенчатой ракеты, если начальный вес одноступенчатой ракеты равен $P_1=200$ т.

4. Решите предыдущую задачу, считая, что двухступенчатая ракета обладает худшей конструктивной характеристикой по сравнению с одноступенчатой, полагая для нее $s=3$.

5. Четырехступенчатая ракета с полезным грузом 100 кг при отсутствии внешних сил достигает в конце активного участка траектории первой космической скорости $V_a=8000$ м/сек. Характеристики s и z , а также скорости истечения одинаковы для всех ступеней. Определите полный начальный вес ракеты, полагая $V_r=2400$ м/сек, $s=7$.

6. При условиях предыдущей задачи определите полный вес частей ракеты, приобретающих первую космическую скорость.

7. Субракеты американской трехступенчатой ракеты «Авангард» имеют следующие веса: первая — 2100 кг, вторая — 1870 кг, третья — 230 кг. Конструктивные характеристики ступеней этой ракеты имеют значения: $s_1=7,00$, $s_2=7,67$, $s_3=4,40$. Вес полезного груза равен 10 кг. Определите суммарную характеристическую скорость ракеты, а также вес всех частей, приобретающих эту скорость в конце активного участка траектории, если скорости истечения газов каждой из ступеней соответственно равны $V_{r1}=2300$ м/сек, $V_{r2}=2400$ м/сек, $V_{r3}=2100$ м/сек. Внешними силами пренебречь.

8. Определите суммарную характеристическую скорость и полный начальный вес двухступенчатой ракеты с полезным грузом $G=500$ кг,

если известно, что $z_1 = 3,55$, $z_2 = 2,75$, $s_1 = 6$, $s_2 = 7$, $V_{r1} = 2200$ м/сек, $V_{r2} = 2400$ м/сек.

9. При условиях предыдущей задачи найдите «сухой» вес каждой ступени, а также общий запас топлива ракеты.

10. Четырехступенчатая ракета-носитель «Скаут» на твердом топливе имеет следующие характеристики: стартовый вес 17,46 Т, начальная тяговооруженность (отношение тяги к весу) 2,71, вес полезной нагрузки, выводимой на орбиту, 116 кг, средний удельный импульс 261 сек, тяга второй ступени 28,2 Т, третьей — 9,93 Т, четвертой — 2,63 Т. Определите конструктивную характеристику всей ракеты, считая ее одинаковой для каждой из ступеней.

§ 3. Обратные и экстремальные задачи динамики точки переменной массы

Справочные сведения

Обратные задачи. Обратными задачами динамики точки переменной массы называют такие, в которых по заданным внешним силам и заданным кинематическим характеристикам движения определяются закон изменения массы точки и программа ориентации вектора реактивного ускорения ω .

В случае прямолинейного вертикального движения, описываемого уравнением

$$m(t) \frac{dV}{dt} = -m(t)g - Q - \frac{dm}{dt} V_r, \quad (1)$$

где g — гравитационное ускорение, Q — сила сопротивления среды, отнесенная к начальной массе точки, $m(t) = M(t)/M_0$ — закон изменения массы, обратная задача сводится к квадратурам

$$m(t) = e^{-\int p dt} \left(C - \int q e^{\int p dt} dt \right), \quad (2)$$

где

$$p = \frac{\dot{V} + g}{V_r}, \quad q = \frac{Q}{V_r}, \quad (3)$$

а C — произвольная постоянная.

Если точка движется в гравитационном поле по заданной гладкой кривой, испытывая сопротивление среды, то задача сводится к отысканию функции $m(t)$, направляющих косинусов α , β , γ реактивного ускорения ω и реакции кривой N из дифференциального уравнения

$$m(t) \frac{dV}{dt} = m(t)g + Q + \frac{1}{M_0} N + m(t)\omega. \quad (4)$$

Если точка совершает свободное движение по заданной траектории, то $N = 0$.

Экстремальные задачи. Формулы, определяющие закон изменения массы, величину реактивного ускорения и программу его ориентации, могут содержать «свободные» параметры (характеризующие, например, форму траектории точки), с изменением которых будут меняться и другие характеристики движения (дальность и высота полета, время работы двигателя, запас топлива и т. д.). В связи с этим возникает экстремальная задача динамики точки переменной массы, заключающаяся в нахождении оптимальных значений «свободных» параметров, для которых требуемые характеристики движения приняли бы максимальные (минимальные) значения. При одном «свободном» параметре задача сводится к исследованию на экстремум функции одного переменного.

Литература: основная — [1] — [3], дополнительная — [4] — [7].

ЗАДАЧИ

1. Определите закон изменения массы ракеты, обеспечивающий ее вертикальный подъем с постоянной скоростью в однородном поле тяжести. Сопротивлением атмосферы пренебречь. Скорость истечения газов считать постоянной.

2. Определите закон изменения массы ракеты, совершающей в однородном поле тяжести равноускоренное вертикальное восходящее движение с ускорением ω . Скорость истечения газов считать постоянной. Сопротивлением атмосферы пренебречь.

3. По какому закону должна изменяться масса ракеты, совершающей вертикальное восходящее движение в однородном поле тяжести с постоянной скоростью V , если на нее еще действует сила сопротивления атмосферы $Q = k V^2$, где k — коэффициент пропорциональности?

4. Точка переменной массы движется в однородном поле тяжести с постоянной скоростью по кривой, заданной в параметрическом виде

$$x = \frac{a - \operatorname{tg} t}{2b}, \quad y = \frac{a - \operatorname{tg} t}{2b} \left[a - \frac{1}{2} (a - \operatorname{tg} t) \right],$$

где x и y — прямоугольные координаты точки (ось x горизонтальна, а ось y вертикальна). Определите закон изменения массы точки и реакцию кривой в функции времени (принять $M = M_0$ при $t = 0$), если реактивная сила все время направлена вдоль скорости точки.

5. При вертикальном подъеме ракеты в однородном поле тяжести ее масса изменяется по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$, где m_0 — начальная масса, а $\alpha = \text{const}$. Определите оптимальное значение α , отвечающее максимально возможной высоте подъема ракеты H_{\max} . Вычислите значение H_{\max} при заданном числе Циолковского z . Сопротивлением атмосферы пренебречь. Скорость истечения газов считать постоянной.

6. Определите закон изменения массы ракеты, движущейся в центральном ньютоновском поле, а также программу ориентации реактивного ускорения ω , при которых траектория ракеты была бы архимедовой спиралью, задаваемой в полярных координатах параметрическими уравнениями

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad r = \rho (\omega t + \varphi_0),$$

где ω , ρ и φ_0 — постоянные величины. Скорость истечения газов реактивной струи считать постоянной.

7. Ракета движется с постоянной скоростью V_0 в центральном ньютоновском поле, сохраняя постоянным угол пеленга α на центр притяжения (угол между скоростью и направлением на точку). Определите траекторию ракеты, программу ориентации реактивного ускорения ω , а также условие оптимальности угла пеленга, для которого

перелет из начальной точки ($r = r_0$) в конечную точку ($r = r_1$) произошел бы с минимальным расходом топлива.

8. С космической станции, находящейся на круговой кеплеровской орбите, спускается аппарат, реактивный двигатель которого развивает трансверсальную тягу. С целью более эффективного контроля движения спускаемого аппарата его все время требуется удерживать на одном геоцентрическом радиусе со станцией. Найдите закон изменения радиуса-вектора спускаемого аппарата, а также закон изменения его массы, считая скорость истечения газов V_r постоянной. За единицы расстояния, времени и массы принять соответственно радиус круговой орбиты космической станции, период ее обращения по орбите и начальную массу спускаемого аппарата времени. Считать, что спускаемый аппарат отделяется с нулевой относительной скоростью.

9. Считая угловую скорость вращения планеты равной ω_0 , определите программу ориентации реактивного ускорения, а также закон изменения массы для меридианного спутника (меридианный спутник — это спутник, движущийся в одной из меридиональных плоскостей планеты), обращающегося по круговой орбите радиуса r с угловой скоростью ω . Скорость истечения газов V_r считать постоянной.

10. Используя решение предыдущей задачи, определите связь между r и ω , при которой реактивное ускорение остается постоянным по модулю. На каком минимальном расстоянии от центра планеты возможно запустить такой спутник? Определите это расстояние для спутника Земли.

11. Меридианный спутник движется по круговой орбите радиуса r с угловой скоростью $\omega = \sqrt{K/r^3}$, где K — гравитационный параметр планеты, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0 . Считая, кроме того, что $\omega = \omega_0/2$, определите закон изменения массы спутника и программу ориентации реактивного ускорения при постоянной скорости истечения газов V_r . Вычислите радиус такой орбиты для спутника Земли.

12. Для удержания спутника на круговой орбите, которая лежит в одной из меридиональных плоскостей планеты, вращающейся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0 , ему сообщается постоянное по модулю реактивное ускорение ω . Найдите оптимальное значение радиуса орбиты r_{opt} спутника, минимизирующее число Циолковского z при заданном числе оборотов спутника N и постоянной скорости истечения газов V_r . Вычислите значение r_{opt} для Земли.

13. Скорость последней ступени ракеты-носителя, выводящей полезную нагрузку на спутниковую орбиту, в конце активного участка должна быть горизонтальной. На ракету действует постоянное по модулю тангенциальное реактивное ускорение, создающее перегрузку $n = 3$. Считая, что движение происходит в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести, выясните возможность существования оптимального угла наклона траектории последней ступени

в начальный момент ее движения, который минимизирует запас топлива. Скорость истечения газов считать постоянной. Сопротивлением атмосферы пренебречь.

14. Осуществляется мягкая посадка космического аппарата на поверхность Луны с круговой селеноцентрической орбиты высотой H . Космическому аппарату сообщается постоянное по модулю тормозное тангенциальное ускорение (при постоянной скорости истечения газов V_r). Считая, что движение происходит в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести, определите число Циолковского z в функции H и выясните возможность существования оптимальной высоты полета H , минимизирующей число z . Каковы должны быть реактивная тяга и время работы двигателя при минимальном значении z ? Вычислите это значение, полагая $V_r = 4$ км/сек.

15. Для создания кругового спутника, движущегося в плоскости одной из параллелей планеты, ему сообщается постоянное по модулю реактивное ускорение ω , лежащее все время в одной плоскости с осью вращения планеты и составляющее с ней неизменный угол ψ . Модуль планетоцентрического радиуса-вектора спутника r (рис. 9.2), планетоцентрическая широта φ и угловая скорость обращения спутника ω заданы. Найдите величину ускорения ω , а также значение r_{\min} , минимизирующее при заданных ω и φ величину этого ускорения.

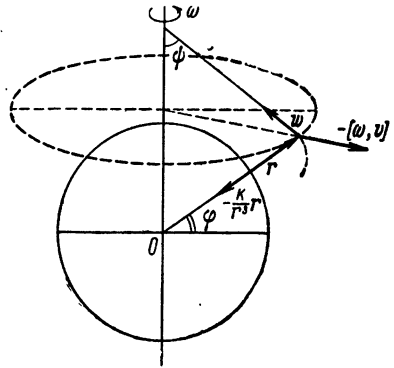


Рис. 9.2.

16. Используя решение предыдущей задачи, найдите оптимальное значение угловой скорости обращения спутника ω_{opt} при которой он смог бы совершить максимальное число оборотов при заданном числе Циолковского z и заданных значениях r и φ . Скорость истечения газов считать постоянной. Определите соответствующее значение ω_{opt} .

17. Для того чтобы искусственный спутник всё время находился над одной и той же точкой планеты, имеющей заданную планетоцентрическую широту φ , ему сообщается постоянное по модулю реактивное ускорение ω , лежащее в одной плоскости с осью вращения планеты и образующее с ней неизменный угол ψ . Найдите зависимость между широтой спутника φ и планетоцентрическим радиусом-вектором спутника r_0 . Определите оптимальное значение угла ψ_{opt} минимизирующее расход топлива при заданном времени работы двигателя, считая скорость истечения газов V_r постоянной. Установите зависимость $\psi_{\text{opt}}(\varphi)$ на малых широтах, полагая $\sin \varphi \approx \varphi$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М., Теория полета неуправляемых ракет, Физматгиз, 1959.
2. Космодемьянский А. А., Курс теоретической механики, ч. II., «Просвещение», 1966.
3. Эскобал П., Методы астродинамики, пер. с англ., «Мир», 1971.

Дополнительная

4. Карагодня В. М., Теоретические основы механики переменного состава, Оборонгиз, 1963.
5. Мещерский И. В., Работы по механике тел переменной массы, Гостехиздат, 1949.
6. Россер Д., Ньютон Р., Гросс Г., Математическая теория полета неуправляемых ракет, ИЛ, 1950.
7. Фертрегт М., Основы космонавтики, пер. с англ., «Просвещение», 1969.

ГЛАВА X

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

§ 1. Орбитальное движение в центральном поле под действием непрерывной тяги

Справочные сведения

Движение космического аппарата в центральном ньютоновском поле под действием непрерывной тяги описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^3}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор космического аппарата, проведенный из притягивающего центра, K — гравитационный параметр, $\boldsymbol{\omega}$ — ускорение аппарата, вызванное непрерывно действующей тягой \mathbf{P} , $\mathbf{P} = m\boldsymbol{\omega}$. Если тяга создается реактивным двигателем, то

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{V_r}{m} \frac{dm}{dt} \boldsymbol{\omega}^0, \quad |\boldsymbol{\omega}^0| = 1. \quad (2)$$

Ускорение $\boldsymbol{\omega}$, вообще говоря, меняется как по величине, так и по направлению. В ряде задач модуль ускорения может оказаться постоянным (специальный закон изменения массы, использование солнечного паруса, движение с малой тягой и т. д.). При определенной ориентации постоянного по модулю ускорения $\boldsymbol{\omega}$ уравнение может быть проинтегрировано до конца. Так, при радиальном, или неизменном направлении вектора $\boldsymbol{\omega}$ решение можно представить в эллиптических функциях.

В случаях, когда уравнения движения космического аппарата не интегрируются в квадратурах, при малых значениях $|\boldsymbol{\omega}|$ используются различные приближенные методы, позволяющие представить решение в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням модуля ускорения. Наибольшей простотой среди таких методов обладает метод, опирающийся на уравнения в оскулирующих элементах (см. гл. VIII).

Солнечный парус. Пусть космический аппарат жестко связан с плоским парусом, имеющим площадь S и полностью отражающим солнечные лучи. Тогда сила F , с которой солнечный свет давит на парус, может быть найдена по формуле

$$F = \alpha \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \cos^2 \varphi,$$

где r_0 — среднее расстояние Земли от Солнца ($r_0 = 1$ а. е.), r — расстояние аппарата от Солнца, φ — угол между нормалью к теневой стороне паруса

и направлением солнечных лучей, α — постоянная солнечного давления (т. е. сила, с которой солнечные лучи давят на идеально отражающую площадку в 1 м^2 , когда последняя находится на расстоянии $r_0 = 1 \text{ а. е.}$ от Солнца и ориентирована перпендикулярно солнечным лучам; известно, что $\alpha = 0,928 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^2 = 9,10 \cdot 10^{-6} \text{ н/м}^2$).

Л и т е р а т у р а: основная — [2], дополнительная — [6], [7].

ЗАДАЧИ

1. Космический аппарат стартует с круговой кеплеровской орбиты под действием реактивной силы, сообщающей ему постоянное по модулю радиальное ускорение, все время направленное по радиусу-вектору, проведенному из центра притяжения. При каких значениях указанного ускорения движение космического аппарата будет инфинитным? Выразите искомые значения ускорений в единицах гравитационного ускорения на исходной круговой орбите.

2. Космический аппарат стартует с круговой кеплеровской орбиты радиуса r_0 , имея постоянное по модулю радиальное ускорение $\omega_r = K/(4r_0^2)$, где K — гравитационный параметр центрального поля. На каком расстоянии от притягивающего центра скорость космического аппарата будет равна местной параболической скорости?

3. Космический аппарат совершает межпланетный перелет с орбиты Земли на орбиту Марса под действием постоянного по модулю радиального ускорения ω_r . Пренебрегая воздействием Земли и Марса и считая, что старт происходит с круговой гелиоцентрической орбиты, определите минимальное значение ω_r , при котором космический аппарат сможет достигнуть орбиты Марса.

4. Для разгона космического аппарата, находящегося на круговой кеплеровской орбите радиуса r_0 , ему сообщается постоянное по модулю трансверсальное ускорение ω_p . Считая ω_p малым и пренебрегая вследствие этого величиной \ddot{r} по сравнению с K/r^2 (r — радиус-вектор относительно притягивающего центра, K — гравитационный параметр центрального поля), получите уравнение траектории космического аппарата в полярных координатах.

5. Разгон космического аппарата с круговой кеплеровской орбиты радиуса r_0 осуществляется при помощи тангенциальной силы, сообщающей ему постоянное по модулю ускорение ω_t . Определите длину s дуги траектории космического аппарата, в конечной точке которой он приобретает вторую космическую скорость.

6. Космический аппарат движется в центральном ньютоновском поле по эллиптической орбите. Покажите, что при сообщении космическому аппарату постоянного по модулю нормального ускорения движение аппарата будет происходить в ограниченной области пространства.

7. Космическому аппарату, движущемуся в центральном ньютоновском поле, сообщается малое постоянное по модулю реактивное ускорение. Определите в функции оскулирующих элементов орбиты,

и истинной аномалии космического аппарата ν программу изменения угла λ , образуемого ускорением с радиусом-вектором, проведенным из притягивающего центра, обеспечивающую: а) постоянство эксцентриситета орбиты, б) постоянство расстояния до перицентра.

8. Космическому аппарату, движущемуся в центральном ньютоновском поле, сообщается малое постоянное по модулю реактивное ускорение. Считая движение плоским и полагая, что в каждый момент времени известны полярные координаты r , φ , а также радиальная V_r и трансверсальная V_p составляющие скорости космического аппарата, определите в функции указанных параметров программу изменения угла λ , образуемого ускорением с радиусом-вектором, обеспечивающую: а) постоянство положения линии апсид, б) максимальную скорость вращения линии апсид.

9. Как следует ориентировать вектор постоянного по модулю малого реактивного ускорения, сообщаемого космическому аппарату, движущемуся в центральном ньютоновском поле, чтобы оставались постоянными: а) полуось оскулирующей орбиты, б) фокальный параметр оскулирующей орбиты?

10. При условиях предыдущей задачи определите ориентацию вектора реактивного ускорения, при которой с максимальной скоростью изменяются: а) полуось оскулирующей орбиты, б) фокальный параметр оскулирующей орбиты.

11. Космическому аппарату, движущемуся в центральном ньютоновском поле, сообщается постоянное по величине малое реактивное ускорение. Покажите, что в плоском движении ускорение, обеспечивающее максимальную скорость изменения любого элемента оскулирующей орбиты, перпендикулярно ускорению, обеспечивающему неизменность того же элемента.

12. Космический аппарат с солнечным парусом движется в поле солнечного притяжения. Определите закон изменения угла α , образуемого радиусом-вектором космического аппарата, проведенным из центра притяжения, с нормалью к теневой поверхности паруса, обеспечивающий движение аппарата по круговой орбите радиуса r_0 . Ускорение, вызываемое световым давлением на рассматриваемой круговой орбите при $\alpha = 0$, принять равным ω_0 .

13. У космического аппарата с солнечным парусом, движущегося в поле солнечного притяжения, можно менять не только угол установки паруса α (угол между радиусом-вектором, проведенным из центра притяжения и нормалью к теневой поверхности паруса), но и площадь паруса S . Определите закон изменения S и α в функции полярных гелиоцентрических координат r и φ , обеспечивающий движение аппарата с постоянным вектором радиационного ускорения ω .

14. Определите законы изменения площади S и угла α установки солнечного паруса космического аппарата, обеспечивающие его

движение с постоянной по модулю скоростью V и постоянной радиальной скоростью \dot{r} . Найдите уравнение траектории аппарата в полярной системе координат. Радиационное ускорение аппарата в начальный момент при нормально ориентированном к солнечным лучам парусе принять равным ω_0 .

15. Космический аппарат с массой m движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса r . При прохождении через некоторую точку N своей орбиты аппарат разворачивает жестко связанный с ним солнечный парус, который в дальнейшем все время ориентируется перпендикулярно солнечным лучам. Сила, с которой солнечный свет давит на парус, в момент прохождения через точку N составляет p . Можно ли гарантировать, что благодаря давлению солнечных лучей на парус аппарат будет все время удаляться от Солнца и что он больше никогда не пройдет через точку N ?

16. Космический аппарат с массой в 1000 кг движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля (эту орбиту будем считать окружностью), и притом настолько далеко от Земли, что ее притяжением можно пренебречь. С помощью плоского солнечного паруса он должен совершить перелет к орбите Марса по траектории, касающейся орбит Земли и Марса (орбиту Марса считаем окружностью, лежащей в одной плоскости с орбитой Земли). Поверхностная плотность материала, из которого изготовлен парус, равна 2 г/м^2 . Во время полета парус постоянно ориентируется перпендикулярно солнечным лучам. Давление солнечного света на такой парус, если бы он находился вблизи Земли, составляло бы примерно $9,10 \cdot 10^{-6} \text{ н/м}^2$. Какую площадь должен иметь парус? Какова его масса?

17. Космический аппарат массы m движется под действием двух сил: притягивающей силы Солнца и отталкивающей силы солнечных лучей, оказывающих давление на парус аппарата. Нормаль к плоскости паруса в течение всего времени движения лежит в неизменной плоскости, проходящей через гелиоцентрический радиус-вектор аппарата и его вектор скорости V . Используя комплексное представление вектора на плоскости, получите дифференциальные уравнения движения аппарата в комплексной форме.

18. Логарифмическая спираль характеризуется в полярных координатах уравнением вида

$$r = r_0 e^{c\phi},$$

где ϕ — полярный угол, r — модуль радиуса-вектора, c — тангенс угла между радиусом-вектором точки спирали и касательной к спирали.

Покажите, что космический аппарат с солнечным парусом, сохраняющим ориентацию относительно радиуса-вектора аппарата, может двигаться по логарифмической спирали.

§ 2. Оптимальные импульсные маневры в центральном поле. Оптимальная дифференциальная коррекция

Справочные сведения

Импульсные маневры. При импульсных орбитальных маневрах дополнительный расход топлива Δm_T можно определить по формуле Циолковского

$$\frac{\Delta m_T}{m_0} = \exp\left(\frac{|\Delta V|}{V_r}\right),$$

где m_0 — начальная масса, V_r — скорость истечения, а $|\Delta V|$ — модуль суммарного импульса скорости, сообщенного космическому аппарату в результате рассматриваемого маневра, так что

$$|\Delta V| = \sum_{i=1}^n |\Delta V_i|,$$

где ΔV_i — импульс скорости, сообщенный в i -й точке траектории. Таким образом, задача о минимизации запаса топлива, необходимого для совершения данного маневра, сводится к минимизации величины $|\Delta V|$ или некоторой ее функции. Свободными параметрами, оптимальные значения которых требуется разыскать, могут быть число импульсов n , углы, задающие их ориентацию в пространстве, а также координаты точек приложения импульсов. В общем случае задача сводится к отысканию экстремума функции многих переменных.

Среди решенных задач оптимального маневрирования особое значение имеет так называемый *двухимпульсный гомановский перелет* между двумя компланарными круговыми орбитами, осуществляемый с помощью двух касательных импульсов скорости ΔV_1 и ΔV_2 (рис. 10.1).

Модуль полного импульса скорости $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ для такого маневра определяется по формуле

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\rho - 1}{\rho} \sqrt{\frac{2}{1 + \rho}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} - 1,$$

где V_1 — скорость на исходной круговой орбите, $\rho = r_2/r_1$ — отношение радиусов конечной и исходной орбит.

Дифференциальная коррекция. Если приложенные импульсы ΔV_i должны лишь незначительно изменить параметры траектории космического аппарата (в смысле малости отношений $\Delta r/r$, $\Delta V/V$, ..., где r , V , ... — значения параметров расчетной траектории, а Δr , ΔV — их отклонения, вызванные приложением импульсов), то для определения необходимых импульсов удобно воспользоваться методом дифференциальной коррекции.

Пусть $x(\tau, x_0)$ — шестимерный вектор фазовых координат космического аппарата (это могут быть, например, три прямоугольные координаты и их производные), x_0 — начальное значение x , τ — время, или какая-нибудь иная монотонно возрастающая переменная (например, полярный угол). Тогда малое отклонение Δx , вызванное малым отклонением начального значения Δx_0 , можно вычислить по формуле

$$\Delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_{\Delta x_0=0} \Delta x_0 + \dots \quad (1)$$

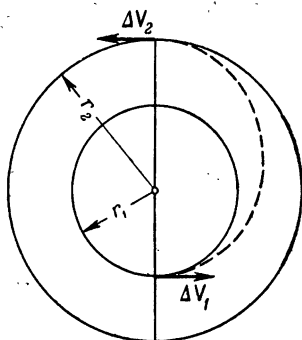


Рис. 10.1.

где невыписанные члены имеют второй и более высокий порядок малости относительно Δx_0 , вследствие чего при достаточно малых значениях Δx_0 ими можно пренебречь.

Если в начальной точке прикладывается корректирующий импульс скорости ΔV_0 , то Δx будет равно

$$\Delta x = A_0 (\Delta x_0 + \Delta y_0),$$

где A_0 — матрица производных $\partial x/\partial x_0$, а Δy_0 — шестимерный вектор, имеющий своими компонентами три составляющие корректирующего импульса при остальных компонентах равных нулю, поскольку координаты космического аппарата в точке приложения импульса не претерпевают изменений. В том случае, если между начальной точкой B_0 и конечной точкой B_n прикладываются еще $n-1$ импульсов $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_{n-1}$, то вследствие свойства суперпозиции линейных систем отклонение Δx_n в точке B_n будет равно

$$\Delta x_n = A_0 \Delta x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A_i \Delta y_i,$$

где

$$A_i = \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_i} \right)_{\Delta x_i=0}$$

— матрица частных производных. Необходимые значения корректирующих импульсов найдутся из системы неоднородных линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i \Delta y_i = -\Delta \hat{x}_n, \quad (2)$$

где $\Delta \hat{x}_n = A_0 \Delta x_0$ — отклонения параметров траектории в конечной точке Δx_0 , вызванные известными начальными отклонениями.

При плоской коррекции (корректирующий импульс скорости имеет только две ненулевые компоненты, лежащие в плоскости корректируемой орбиты) орбит, близких к круговым, в качестве компонент вектора x удобно использовать модуль скорости V , угол траектории (угол между вектором скорости и трансверсалью) θ , полярный радиус r и дальность вдоль траектории L . В качестве независимой переменной можно взять полярный угол v . Матричное уравнение (1) представится тогда в виде

$$\begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta r \\ \Delta L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos v - 1 & -V \sin v & \frac{V}{r} (\cos v - 1) & 0 \\ \frac{2}{V} \sin v & \cos v & \frac{\sin v}{r} & 0 \\ \frac{2r}{V} (1 - \cos v) & r \sin v & 2 - \cos v & 0 \\ \frac{r}{V} (4 \sin v - 3v) & 2r (\cos v - 1) & r \cos v - 3v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_0 \\ \Delta \theta_0 \\ \Delta r_0 \\ \Delta L_0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, каждая из матриц A_i будет функцией полярного угла v_i , разделяющего точки B_i и B_n . Разрешая систему (2) относительно Δy_i , получим ее решение в виде

$$\Delta V_i = \Delta V_i(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

где α_i — углы ориентации импульсов ΔV_i . Выбирая, например, в качестве минимизируемого функционала выражение

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i^2,$$

можно написать необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Л и т е р а т у р а: основная — [1] — [5], дополнительная — [8] — [10].

ЗАДАЧИ

1. Спутник переводится с начальной круговой орбиты на эллиптическую орбиту заданного эксцентриситета e с помощью одного импульса скорости ΔV . Где на новой эллиптической орбите должна быть расположена точка приложения импульса, чтобы его величина была минимальной? Определите отношение ΔV_{\min} к скорости на начальной круговой орбите V_0 .

2. Космический аппарат с начальной круговой орбиты переводится на параболическую с помощью одного импульса скорости ΔV . Где на параболической орбите должна быть расположена точка приложения импульса, чтобы его величина была минимальной? Найдите отношение ΔV_{\min} к скорости на исходной круговой орбите V_0 .

3. Перевод космического аппарата с круговой орбиты на гиперболическую с заданной величиной скорости на бесконечности V_∞ производится с помощью одного импульса скорости ΔV . Определите оптимальное значение радиуса исходной круговой орбиты, при котором величина импульса ΔV будет минимальной.

4. Космический аппарат, движущийся по параболической орбите, переводится на гиперболическую с заданной скоростью V_∞ на бесконечности с помощью одного импульса скорости в вершине параболы. Существует ли оптимальное значение радиуса-вектора перицентра r_p , при котором величина импульса ΔV минимальна?

5. Перелет спутника с круговой орбиты радиуса r_1 на круговую орбиту радиуса r_2 ($r_2 > r_1$) осуществляется по гомановскому эллипсу. Определите отношение радиусов r_2/r_1 орбит, при котором суммарный импульс скорости будет таким же, какой необходим для перевода спутника с исходной круговой орбиты радиуса r_1 на параболическую с расстоянием до перицентра, равным радиусу исходной круговой орбиты.

6. Перевод спутника с круговой орбиты радиуса r_1 на круговую орбиту радиуса r_2 производится по схеме гомановского двухимпульсного перехода. Определите значение отношения r_2/r_1 , при котором суммарный импульс скорости достигает максимальной (минимальной) величины.

7. При каких значениях отношения $r_2/r_1 > 1$ переход с круговой орбиты радиуса r_1 на круговую орбиту радиуса r_2 по схеме гомановского двухимпульсного перехода требует большего суммарного импульса скорости, чем перелет с промежуточным удалением в бесконечно удаленную точку и последующим возвращением оттуда на орбиту r_2 ?

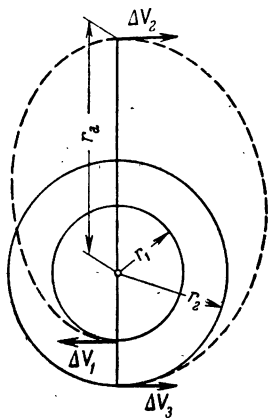


Рис. 10.2.

8. Как было показано советским ученым А. Штернфельдом, двухимпульсный переход спутника Земли с круговой орбиты радиуса r_1 на круговую орбиту радиуса $r_2 > r_1$ по схеме гомановского двухимпульсного перелета перестает быть оптимальным при достаточно больших значениях отношения r_2/r_1 . Более выгодным оказывается трехимпульсный (*биэллиптический*) переход, при котором первый касательный импульс скорости ΔV_1 переводит спутник на эллиптическую орбиту с апогейным расстоянием $r_a > r_2$ (рис. 10.2). В апогее этой орбиты прикладывается второй касательный импульс ΔV_2 , в результате которого перигейное расстояние спутника

становится равным r_2 . Посредством третьего (тормозного) касательного импульса, приложенного в перигее, спутник переводится на круговую орбиту радиуса r_2 . Покажите, что суммарный импульс ΔV при такой схеме перехода определяется по формуле

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{1}{V \rho_a^*} \left(\sqrt{\frac{2\rho_a^*}{\rho_a + \rho_a^*} - 1} \right) + \sqrt{\frac{2}{\rho_a^*} \left(\frac{1}{1 + \rho_a^*/\rho} - \frac{1}{\sqrt{1 + \rho_a^*}} \right)} + \sqrt{\frac{2\rho_a^*}{1 + \rho_a^*} - 1},$$

где V_1 — круговая скорость на исходной круговой орбите, а $\rho_a^* = r_a/r_1$.

9. Космический аппарат переводится с круговой орбиты радиуса r_1 на круговую орбиту радиуса $r_2 > r_1$ с помощью трехимпульсного (*биэллиптического*) перелета (рис. 10. 2.). Для заданного отношения r_2/r_1 определите оптимальное значение апогейного расстояния переходной орбиты r_a , при котором суммарный импульс скорости имеет экстремальное значение. При каком значении r_2/r_1 такой оптимальный трехимпульсный перелет вырождается в двухимпульсный перелет по гомановскому эллипсу?

10. Поворот плоскости круговой орбиты осуществляется посредством следующего трехимпульсного маневра: с помощью первого касательного импульса скорости ΔV_1 космический аппарат переводится на промежуточную эллиптическую орбиту с бесконечно удаленным апоцентром, где прикладывается второй импульс ΔV_2 , посредством которого производится поворот эллиптической орбиты на задан-

ный угол i . Третий касательный (тормозной) импульс ΔV_3 прикладывается в перицентре повернутой эллиптической орбиты, в результате чего космический аппарат возвращается на круговую орбиту того же радиуса, что и начальная, но повернутую на требуемый угол i . Для каких значений i указанный маневр требует меньшего суммарного импульса скорости $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$, чем одноимпульсный поворот исходной круговой орбиты (рис. 10.3)?

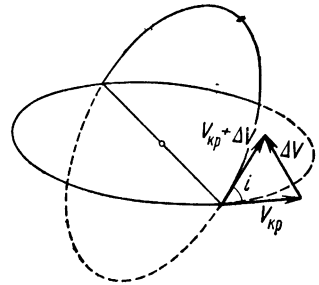


Рис. 10.3.

11. Покажите, что при трехимпульсном маневре поворота плоскости круговой орбиты радиуса r , описанном в предыдущей задаче, суммарный импульс скорости ΔV при конечном расстоянии до апоцентра промежуточной орбиты r_a вычисляется по формуле

$$\frac{\Delta V}{V_{кр}} = 2 \left[\left(\frac{r_a}{r} + 2 \sin \frac{i}{2} \right) \sqrt{\frac{2}{\frac{r_a}{r} \left(1 + \frac{r_a}{r} \right)} - 1} \right],$$

где $V_{кр}$ — скорость на исходной круговой орбите.

Вычислите отношение r_a/r , для которого трехимпульсный поворот орбиты на угол $i = \frac{\pi}{2}$ даст 20%-ную экономию импульса скорости по сравнению с одноимпульсным поворотом.

12. Космический аппарат должен встретиться с орбитальной станцией, находящейся на круговой орбите. Орбита космического аппарата также близка к круговой того же радиуса. Под каким углом γ в зависимости от истинной аномалии ν (рис. 10. 4) следует сообщить космическому аппарату корректирующий импульс скорости ΔV , чтобы величина его была минимальной, для ликвидации разности высот полета ΔH между орбитальной станцией и космическим аппаратом? Определите минимальную величину ΔV . Допустимо считать, что ΔH весьма мало по сравнению с радиусом орбиты.

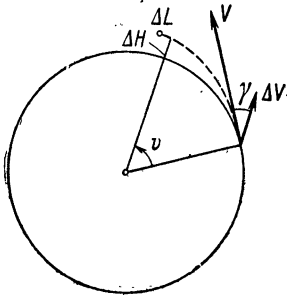


Рис. 10.4.

13. Космический аппарат, движущийся по круговой орбите радиуса r , должен выйти в точку встречи с орбитальной станцией, орбита которой близка к круговой того же радиуса, не имея ошибки по дальности вдоль траектории ΔL . Под каким углом γ в зависимости от истинной аномалии ν (рис. 10.4) следует приложить корректирующий импульс

скорости ΔV , чтобы его величина была минимальной? Определите ΔV_{\min} . Отношение $\Delta L/r$ считать весьма малым.

14. При условиях предыдущей задачи определите истинную аномалию ϑ точки приложения импульса ΔV , с помощью которого еще ликвидируется и пролет по высоте ΔH .

15. С помощью импульса скорости ΔV , сообщаемого космическому аппарату в некоторой точке A его траектории, нужно ликвидировать малое отклонение от расчетного значения одного из параметров x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), характеризующих движение в плоскости траектории. Под каким углом γ к радиусу-вектору точки A должен быть направлен корректирующий импульс ΔV , чтобы его величина была минимальной?

16. Космический аппарат возвращается к планете по параболической траектории, в перигентре которой происходит вход в атмосферу. В результате проведенных измерений было обнаружено, что перигентр орбиты выходит из допустимого «коридора входа». Под каким углом γ к радиусу-вектору r нужно приложить корректирующий импульс скорости ΔV , ликвидирующий ошибку Δr_n (r_n — радиус-вектор перигентра расчетной траектории), чтобы его величина была минимальной, если $r/r_n = n$? Вычислите значения угла γ для $n = 2$ и $n = 5$.

17. Стыковка двух спутников должна произойти на круговой орбите. Однако вследствие ошибок выведения в заданный момент времени спутники оказались смещенными относительно друг друга на малые величины ΔH (вдоль радиуса-вектора) и ΔL (вдоль трансверсали). Указанные отклонения должны быть ликвидированы с помощью одного импульса скорости ΔV , сообщаемому одному из спутников. Предполагая, что угол наклона импульса скорости к горизонту выбран из условия минимума $|\Delta V|$, покажите, что соответствующее значение истинной аномалии ϑ новой точки встречи зависит только от отношения $k = \Delta H/\Delta L$.

18. Космический аппарат должен встретиться с орбитальной станцией, находящейся на круговой орбите радиуса r . Однако после приложения в точке A_1 тормозного импульса, переводящего космический аппарат на круговую орбиту, оказалось, что он имеет малые ошибки ΔH и ΔL по высоте и по дальности вдоль траектории соответственно относительно заданной точки встречи. Для устранения указанных отклонений космическому аппарату сообщается два касательных импульса скорости ΔV_1 и ΔV_2 . Первый импульс скорости ΔV_1 прикладывается в точке A_1 , имеющей заданную угловую дальность ϑ_1 относительно новой точки встречи A . Установите условие, которому должен удовлетворять угол ϑ_2 , определяющий относительно точки A положение точки A_2 , где прикладывается второй импульс скорости ΔV_2 , чтобы величина $J = |\Delta V_1| + |\Delta V_2|$ была минимальной.

§ 3. Вариационные задачи динамики ракет и космического полета

Справочные сведения

В ряде задач о движении ракеты или космического аппарата часть из приложенных сил можно изменять в процессе движений по нашему усмотрению. Например, если на аппарат действует реактивная тяга, то можно задать как программу ориентации ее в пространстве, так и закон изменения массы, определяющий величину тяги; при движении в атмосфере изменением угла атаки можно менять величины аэродинамических сил, действующих на аппарат, и т. д. Выбор таких программ задания свободных функций, называемых *управлениями*, можно подчинить некоторым условиям оптимальности, т. е. условиям, при которых заданные характеристики движения (расход топлива, высота, дальность, время движения и т. д.) достигали бы максимальных (минимальных) значений. Минимизируемая (максимизируемая) величина, значение которой определяется заданием управления, называется *функционалом*. Если, например, максимизируется путь, пройденный летательным аппаратом, то функционал J имеет вид

$$J = \int_{t_0}^T f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt, \quad (1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — координаты аппарата, t — время (t_0 и T — начальный и конечный моменты движения). Функции x_1, x_2, \dots, x_n и $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ подчинены дифференциальным уравнениям, содержащим искомое управление, которые запишем в виде

$$\Phi_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m < n). \quad (2)$$

При $f=1$ приходим к задаче о *быстродействии* — минимуме времени полета $T-t_0$.

Решение сформулированной вариационной задачи на условный экстремум дается *теоремой Эйлера—Лагранжа*: чтобы функции x_1, x_2, \dots, x_n давали экстремум функционалу (1) при дополнительных условиях (2), необходимо удовлетворить уравнениям Эйлера—Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где функция Лагранжа

$$F = f + \sum_{s=1}^m \lambda_s(t) \Phi_s, \quad (3')$$

а λ_s — неопределенные множители Лагранжа. Система n уравнений (3) вместе с m уравнениями связей (2) содержит $n+m$ неизвестных функций $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, дающих решение вариационной задачи.

Уравнения связей (2) могут иметь вид

$$\int_{t_0}^T \Psi_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt = l_s \quad (s = 1, 2, \dots, m).$$

В этом случае задача называется *изопериметрической*. Функция Лагранжа F , удовлетворяющая уравнениям (3), определяется аналогично:

$$F = f + \sum_{s=1}^m \lambda_s \psi_s.$$

Однако теперь множители Лагранжа являются константами.

Поставленную вариационную задачу об отыскании оптимального управления можно сформулировать в более общем виде.

Пусть движение изучаемого объекта (ракеты или космического аппарата) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = \varphi_s [t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)] \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

где $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ — неизвестные *управляющие функции*, принадлежащие некоторому замкнутому ограниченному множеству $u(t) \in U$, а x_1, x_2, \dots, x_n — *фазовые координаты* объекта (обобщенные координаты и скорости), для которых заданы их начальные значения в момент $t = t_0$:

$$x_s(t_0) = x_s^{(0)} \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Кроме того, для части фазовых координат x_1, x_2, \dots, x_p ($p < n$) задаются их конечные значения в момент $t = T$:

$$x_k(T) = x_k^{(1)} \quad (k = 1, 2, \dots, p < n). \quad (6)$$

Тогда задача заключается в отыскании таких допустимых управляющих функций $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$, чтобы порождаемые ими фазовые координаты x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяли дифференциальным уравнениям (4) и условиям (5) — (6), а заданный функционал

$$J = J(x_{p+1}^{(1)}, x_{p+2}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$$

принимал максимальное (минимальное) значение из возможных. Если время движения не фиксируется, то функционал J будет зависеть также и от T . Сформулированная таким образом задача носит название *задачи Майера*. Максимизирующая система функций u_1, u_2, \dots, u_r обязана быть подчинена следующим необходимым условиям: множители Лагранжа должны удовлетворять уравнениям Эйлера—Лагранжа, которые в этом случае имеют вид

$$\lambda_s = \frac{\partial F}{\partial x_s}, \quad F = \sum_{s=1}^n \lambda_s \varphi_s \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

а также уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Для определения произвольных постоянных следует использовать соотношения

$$\lambda_j^{(1)} = - \frac{\partial J}{\partial x_j^{(1)}} \quad (j = p+1, p+2, \dots, n), \quad \sum_{s=1}^n \lambda_s^{(1)} x_s^{(1)} = \frac{\partial J}{\partial T},$$

которые вместе с (5) и (6) образуют *граничные условия задачи*.

Необходимые условия существования оптимального управления, доставляющего максимум (минимум) функционалу J , можно получить с помощью *принципа максимума Понтрягина*.

Пусть $u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_r^*(t)$ — допустимое оптимальное управление, а $x_1^*(t), x_2^*(t), \dots, x_n^*(t)$ — соответствующая ему фазовая траектория. Введем в рассмотрение функцию H , зависящую от $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r$ и некоторых вспомогательных переменных p_1, p_2, \dots, p_n :

$$H = \sum_{s=1}^n p_s \Phi_s. \quad (7)$$

Определим эти вспомогательные переменные системой дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial x_s} \quad (s=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Тогда, если управление $u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_r^*(t)$ является оптимальным, то существует такое нетривиальное решение $p_1^*(t), p_2^*(t), \dots, p_n^*(t)$ системы (8), что для любого момента $t_0 \leq t < T$ выполнено условие максимума

$$H(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_r^*) = \max H(p_1, p_2, \dots, p_n, u_1, u_2, \dots, u_r).$$

Таким образом, фазовые координаты объекта x_1, x_2, \dots, x_n вместе с вспомогательными переменными p_1, p_2, \dots, p_n образуют каноническую систему переменных, изменение которых описывается гамильтоновой системой уравнений с гамильтонианом (7). В связи с этим вспомогательные переменные p_1, p_2, \dots, p_n называют сопряженными импульсами. Кривую, соединяющую точки n -мерного пространства с координатами $p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*$, значения которых соответствуют оптимальному движению, называют p -траекторией системы.

Л и т е р а т у р а: основная — [1]—[5], дополнительная — [8]—[10].

ЗАДАЧИ

1. Ракета, масса которой может изменяться по заданному закону $M = M_0 m(t)$ ($m(0) = 1$), совершает вертикальное восходящее движение в однородном поле тяжести, испытывая аэродинамическое сопротивление $Q(V, z)$, где V — скорость, z — высота. Используя метод множителей Лагранжа, составьте дифференциальные уравнения Эйлера — Лагранжа, задающие поле экстремалей в задаче об оптимальном законе изменения массы $m(t)$, обеспечивающем достижение максимальной высоты $z_{\max} = \int_0^T V dt$. Скорость истечения газов V_r считать постоянной.

2. Покажите, что при условиях предыдущей задачи соотношение

$$mgV_r + Q(V_r - V) - VV_r \frac{\partial Q}{\partial V} = 0,$$

где g — ускорение силы тяжести, является первым интегралом дифференциальных уравнений, задающих поле экстремалей.

3. Составьте функционал в задаче 1 при условии однородности атмосферы $\left(\frac{\partial Q}{\partial z} \equiv 0\right)$, взяв в качестве независимой переменной

скорость ракеты V . Найдите решение соответствующего уравнения Эйлера — Лагранжа.

4. Ракета совершает вертикальное восходящее движение в однородном поле тяжести под действием аэродинамической силы сопротивления $Q = kV^2$ (V — скорость ракеты, k — постоянная). Закон изменения массы ракеты $M = M_0 m(t)$, ($m(0) = 1$) обеспечивает достижение максимальной высоты. Определите ускорение ω ракеты в функции скорости.

5. Определите оптимальное значение начальной скорости ракеты V_0 и пройденный ею путь H_{\max} до полной остановки при вертикальном восходящем движении, считая, что закон изменения ее массы обеспечивает достижение максимальной высоты. Поле тяжести принять однородным, скорость истечения газов постоянной, а силу аэродинамического сопротивления Q равной kV^2 , где V — скорость ракеты, а k — постоянная.

6. Масса ракеты изменяется по оптимальному закону, обеспечивающему достижение максимальной высоты при движении по вертикали в однородном поле тяжести. Считая скорость истечения газов V_r постоянной, а закон аэродинамического сопротивления квадратичным, определите отношение в начальный момент времени:

а) реактивной силы Φ_0 к весу $M_0 g$,

б) реактивной силы к сумме сил веса и аэродинамического сопротивления Q при условии, что отношение начальной скорости V_0 к V_r настолько мало, что степенями этого отношения выше первой можно пренебречь.

7. Ракета переменной массы совершает восходящее вертикальное движение в неоднородной атмосфере, плотность которой ρ изменяется с высотой H по экспоненциальному закону $\rho = \rho_0 e^{-\beta H}$, $\beta = \text{const}$. Определите ускорение ω ракеты в функции ее скорости V , если закон изменения массы ракеты обеспечивает достижение максимальной высоты. Скорость истечения газов V_r принять постоянной, а закон аэродинамического сопротивления квадратичным.

8. Ракета поднимается по вертикали в однородном поле тяжести, испытывая аэродинамическое сопротивление $Q = kV^2$, где V — скорость, а k — константа. Закон изменения массы ракеты $M = M_0 m(t)$, где M_0 — начальная масса, обеспечивает достижение заданной высоты за минимальное время T . Приняв за независимую переменную скорость ракеты, составьте функционал задачи и функцию Лагранжа F .

9. При условии предыдущей задачи найдите решение уравнения Эйлера — Лагранжа, определяющее закон изменения относительной массы $m(t)$ в функции скорости ракеты V .

10. Ракета переменной массы, совершающая вертикальное движение в однородном поле тяжести, поднимается на заданную высоту H_1 за минимальное время. Ее скорость в начальный момент и на высоте H_1 равна соответственно V_0 и V_1 . Определите необходимый запас топлива M_T , если в начальный момент масса ракеты равна M_0 . Скорость

истечения газов V_r считать постоянной, а силу аэродинамического сопротивления Q равной kV^2 .

11. Ракета переменной массы движется по параболе, расположенной в вертикальной плоскости и заданной уравнением $y = -ax^2 + H$ (рис. 10.5), под действием силы тяжести $P = M_0 g m(t)$, реактивной силы $\Phi = -\frac{dm}{dt} V_r$ ($V_r = \text{const}$) и

силы аэродинамического сопротивления $Q(V)$. Закон изменения массы ракеты обеспечивает прохождение заданной длины дуги параболы l за минимальное время T . Выбрав за независимую переменную скорость движения ракеты V , составьте выражение для функционала задачи T и функции Лагранжа F .

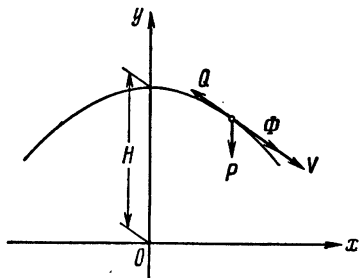


Рис. 10.5.

12. Ракета переменной массы совершает движение по окружности радиуса r , расположенной в вертикальной плоскости, под действием силы тяжести $P = M_0 g m(t)$, реактивной силы $\Phi = -m_0 \frac{dm}{dt} V_r$ ($V_r = \text{const}$) и силы аэродинамического сопротивления $Q = kV^2$ ($k = \text{const}$). Определите значение множителя Лагранжа λ в вариационной задаче о прохождении ракетой заданной длины дуги окружности l_1 за минимальное время, считая, что известна начальная скорость ракеты V_0 .

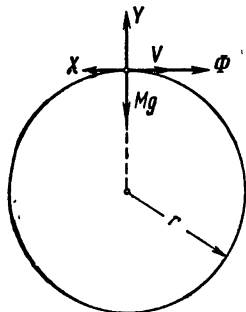


Рис. 10.6.

13. Космический аппарат переменной массы движется по круговой орбите радиуса r под действием центральной силы тяготения, реактивной силы $\Phi = -M_0 \frac{dm}{dt} V_r$ ($V_r = \text{const}$),

силы аэродинамического сопротивления $X = (a + b\alpha^3) V^2$ и подъемной силы $V = ka^2 V^2$ (рис. 10.6), где a и b — постоянные, зависящие от конструктивных характеристик аппарата и плотности атмосферы, а α — угол атаки крыла.

Определите закон изменения массы аппарата $m = M/M_0$ в функции скорости V , обеспечивающий максимальную дальность активного участка полета по орбите. Время движения не фиксировано.

14. Ракета, масса которой меняется по заданному закону, движется в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести. Пренебрегая сопротивлением атмосферы, определите программу изменения угла ϕ наклона вектора тяги Φ к горизонту, обеспечивающую максимальную дальность полета при заданном времени работы двигателя на активном участке траектории (рис. 10.7).

15. Масса ракеты, движущейся в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести, меняется по закону $M = M_0 e^{-\alpha t}$, где M_0 — начальная масса, а α — постоянная. Программа изменения угла φ наклона вектора тяги к горизонту соответствует

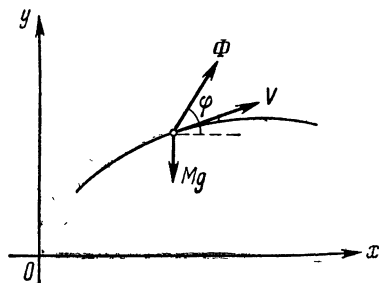


Рис. 10.7.

достижению максимальной дальности полета. Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая, что в начальный момент на высоте $y = 0$ (рис. 10.7) скорость ракеты равна нулю, определите ее траекторию на активном участке движения, а также полную дальность L_{\max} при заданном времени работы двигателя T .

16. При условиях предыдущей задачи найдите полную дальность ракеты L_{\max} , если ее масса меняется

по закону $M = M_0 - qt$, где M_0 — начальная масса, а $q = \text{const}$. Скорость истечения газов считать постоянной.

17. Определите программу ориентации вектора реактивной тяги ракеты класса «земля — воздух», при которой она смогла бы достигнуть максимальной дальности вдоль прямой, проведенной из точки старта под заданным углом β к горизонту. Примите, что масса ракеты меняется по закону $M = M_0 e^{-\alpha t}$ (M_0 — начальная масса, α — константа), а движение происходит в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести. Сопротивлением атмосферы пренебречь. Начальную скорость принять равной нулю, а скорость истечения газов V_r постоянной.

18. Одноступенчатая ракета-носитель переменной массы, закон изменения которой считается заданным, выводит полезную нагрузку на круговую орбиту заданной высоты h . Считая поле тяжести однородным и пренебрегая сопротивлением атмосферы, определите программу изменения угла φ наклона вектора реактивной тяги к горизонту, обеспечивающую минимальный расход топлива при движении в вертикальной плоскости.

19. При условиях предыдущей задачи определите высоту орбиты h , при которой исчезает пассивный участок траектории выведения и первая космическая скорость $V_{кр}$ достигается непосредственно в конце активного участка траектории. Закон изменения массы ракеты задан и соответствует постоянной величине реактивного ускорения ω .

20. Космический аппарат стартует с круговой кеплеровской орбиты радиуса r_0^* и под действием постоянной по величине реактивной силы разгоняется до параболической скорости. Используя принцип максимума Понтрягина, запишите в безразмерных полярных координатах $r, \varphi, u = \dot{r}, v = r\dot{\varphi}$ гамильтониан и граничные условия вариационной задачи о наборе параболической скорости за минимальное время. Управление осуществляется изменением угла γ между радиусом-вектором космического аппарата, проведенным из притягиваю-

шего центра, и вектором реактивной тяги. За единицы длины и времени возьмите радиус исходной круговой орбиты r_0^* и величину $T/(2\pi)$, где T —период обращения по орбите. Скорость истечения газов V^* считать постоянной.

21. Космический аппарат, стартуя с круговой орбиты, разгоняется до параболической скорости за фиксированное время T при постоянном по величине реактивном ускорении ω . Используя принцип максимума Понтрягина, найдите программу изменения угла γ между вектором реактивного ускорения и радиусом-вектором космического аппарата, проведенным из притягивающего центра, минимизирующую время работы двигателя $t_{дв}$. Получите выражение для функции переключения κ .

22. Перелет космического аппарата с одной гелиоцентрической орбиты на другую ей компланарную осуществляется с помощью солнечного паруса, для которого отношение силы светового давления Солнца на перпендикулярно ориентированный к солнечным лучам парус к массе космического аппарата на исходной круговой орбите радиуса r_0^* равно ω_0^* . Используя принцип максимума Понтрягина, определите программу изменения угла установки паруса γ (рис. 10.8), обеспечивающую минимальное время перелета.

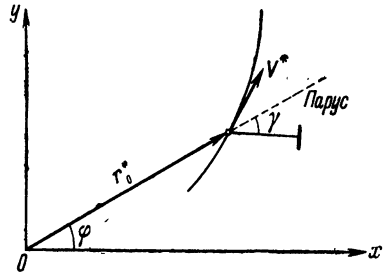


Рис. 10.8.

23. Точка переменной массы, испытывающая действие реактивной силы, движется в центральном поле, сообщаемом ей ускорение $\omega = -\omega^2 r$, где r —радиус-вектор точки, проведенный из притягивающего центра. Покажите, что в задаче на быстродействие годограф вектора сопряженных переменных (p —траектория) на оптимальной траектории дается уравнением

$$p = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

где a и b —векторные постоянные.

24. Движение спускаемого аппарата в атмосфере вокруг его центра масс в вертикальной плоскости на участке траектории, где скорость движения велика, с достаточной для первого приближения точностью описывается дифференциальным уравнением

$$J_z \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M_z^\alpha \alpha + M_z^\delta \delta, \quad |\delta| \leq \delta_{\max},$$

где α —угол атаки, J_z —момент инерции спускаемого аппарата относительно поперечной оси, δ —угол отклонения органа управления,

M_2^a , M_2^b — соответствующие постоянные коэффициенты моментов аэродинамических сил относительно поперечной оси. Найдите оптимальный закон управления углом δ , обеспечивающий минимальное время стабилизации по углу α , т. е. полагая в конечный момент $\alpha = \dot{\alpha} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Рябов Ю. А., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, «Наука», 1971.
2. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, «Наука», 1969.
3. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Механика космического полета с малой тягой, «Наука», 1966.
4. Лоуден Д. Ф., Оптимальные траектории для космического полета с малой тягой, пер. с англ., «Наука», 1968.
5. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, под ред. Дж. Лейтмана, пер. с англ., «Наука», 1965.

Дополнительная

6. Балк М. Б., Элементы динамики космического полета, «Наука», 1965.
7. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения, «Наука», 1968.
8. Лейтман Дж., Введение в теорию оптимального управления, пер. с англ., «Наука», 1968.
9. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, изд. 2-е, «Наука», 1969.
10. Эскобал П., Методы астродинамики, пер. с англ., «Мир», 1971.

ГЛАВА XI

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Для оценки влияния суточных изменений плотности атмосферы на движение спутника Земли Куком и Кинг-Хили была получена следующая формула для вычисления плотности ρ атмосферы на расстоянии r от центра Земли:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + F \cos \chi \right) \exp \frac{r - r_0}{H},$$

где ρ_0 — плотность на расстоянии r_0 , F и H — константы, а χ — геоцентрический угол между радиусом-вектором r и центром выпучивания атмосферы вследствие солнечного нагрева. Докажите справедливость формулы

$$\cos \chi = \sin \delta_{\text{в}} \sin i \sin u + \cos \delta_{\text{в}} [\cos (\delta_{\text{л}} - \alpha_{\text{в}}) \cos u - \sin (\delta_{\text{л}} - \alpha_{\text{в}}) \sin u \cos i],$$

где $\alpha_{\text{в}}$ и $\delta_{\text{в}}$ — соответственно прямое восхождение и склонение центра выпучивания.

2. Определите годограф скорости точки, описывающей одну из кривых конического сечения.

3. Материальная точка движется в центральном ньютоновском поле сил. Докажите существование следующего векторного интеграла движения:

$$\mathbf{V} - \frac{K}{\sigma} \mathbf{e}_{\varphi} = \mathbf{q},$$

где \mathbf{q} — векторная постоянная, \mathbf{V} — скорость точки, \mathbf{e}_{φ} — единичный вектор трансверсали полярной системы координат с полюсом в центре притяжения, σ — величина момента количества движения точки относительно притягивающего центра, K — гравитационный параметр центрального поля.

Покажите, что векторы σ (момент количества движения), λ (вектор Лапласа) и \mathbf{q} образуют неподвижную ортогональную правую тройку векторов, при этом

$$\mathbf{q} = \frac{K}{\sigma} \mathbf{e},$$

где \mathbf{e} — эксцентриситет орбиты.

4. С искусственного спутника Земли, находящегося на круговой кеплеровской орбите радиуса r_0 , отделяется возвращаемая на Землю капсула. Вход в атмосферу можно считать начавшимся при достижении $r = r_*$. Докажите справедливость формулы

$$\frac{r_0}{r_*} = \frac{1 - \cos \varphi}{r_0 V_*^2 / r_* V_*^2 \cos^2 \vartheta} + \frac{\cos(\varphi - \vartheta)}{\cos \vartheta},$$

где ϑ — угол траектории в точке схода с орбиты, φ — геоцентрический угол между точкой схода с орбиты и точкой входа в атмосферу, V_* — первая космическая скорость на расстоянии r_* от центра Земли.

5. Несколько материальных точек движутся относительно центрального тела. Выполняются следующие законы движения: 1) каждое тело движется по эллиптической орбите, в центре которой находится центральное тело, 2) плоскость движения каждой точки неподвижна в пространстве и секторная скорость ее постоянна, 3) периоды обращения всех точек одинаковы и равны T . Установите закон тяготения, действующий в этой системе.

6. Материальная точка движется в центральном ньютоновском силовом поле. Покажите, что дифференциальные уравнения движения можно преобразовать к виду

$$\ddot{x} = -\frac{K}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{r} \right), \quad \ddot{y} = -\frac{K}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right),$$

где K — гравитационный параметр, c — постоянная площадей. Исходя из этих уравнений, получите уравнение траектории

$$r = \frac{c^2}{K} + Ax + By,$$

в котором A и B — произвольные постоянные.

7. Согласно гипотезе О. Ю. Шмидта Солнечная система образовалась в результате захвата Солнцем газово-пылевого облака. Пусть само облако плоское, плотность его постоянна, а все его частицы двигались по круговым орбитам относительно инерциальной системы координат с началом в центре Солнца. Пусть, кроме того, некоторая планета образовалась из частиц, первоначально заключенных в кольцо с радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) в результате неупругих столкновений частиц кольца при условии, что большая часть механической энергии перешла в теплоту. Допуская, что центр масс образовавшейся планеты движется по круговой орбите радиуса R ($r_1 < R < r_2$), покажите, что планета должна вращаться вокруг своей оси в том же направлении, в каком она обращается по орбите вокруг Солнца.

8. Покажите, что для того чтобы семейство из ∞^2 кривых, определяемых дифференциальным уравнением

$$y'' = \varphi(x, y, y'),$$

представляло собой семейство траекторий динамической системы, определяемой уравнениями движения

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \lambda(x, y) \dot{y} &= \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x}, \\ \ddot{y} - \lambda(x, y) \dot{x} &= \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

необходимо и достаточно, чтобы величина

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} - \frac{3\Phi y'}{1+y'^2}$$

была полной производной функции от x и y по x .

9. Покажите, что на эллиптической траектории, описываемой точкой на плоскости под действием центральной силы, действие по Гамильтону изменяется пропорционально площади, описываемой около другого фокуса.

10. Покажите, что

$$\int V_x \delta x - x \delta V_x$$

есть интегральный инвариант для плоского движения материальной точки, имеющей координаты x, y , компоненты скорости V_x, V_y и притягивающейся центральной силой с центром в начале координат, величина которой прямо пропорциональна расстоянию материальной точки от начала координат.

11. В задаче двух неподвижных центров с помощью последнего множителя Якоби выведите первый интеграл

$$r_1^2 r_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - 2c(m_1 \cos \vartheta_1 + m_2 \cos \vartheta_2) = \text{const},$$

где r_1, r_2 — радиусы-векторы, проведенные из центра сил, а ϑ_1, ϑ_2 — углы, образуемые этими радиусами-векторами с линией центров.

12. В задаче двух неподвижных центров расстояние между центрами равно $2c$, а большие полуоси софокусных относительно центров конических сечений, проходящих через движущуюся точку, равны q_1 и q_2 . Положив

$$p_1 = \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2} \dot{q}_1, \quad p_2 = \frac{q_1^2 - q_2^2}{c^2 - q_2^2} \dot{q}_2,$$

покажите, что уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dq_l}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad \frac{dp_l}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \quad (l = 1, 2),$$

где

$$H = \frac{1}{2} \frac{q_1^2 - c^2}{q_1^2 - q_2^2} p_1^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2 - q_2^2}{q_1^2 - q_2^2} p_2^2 - \frac{K_1}{q_1 - q_2} - \frac{K_2}{q_1 + q_2},$$

а K_1 и K_2 — постоянные.

13. Точка описывает эллипс под действием центральной силы с центром в центре эллипса. В момент, когда она проходит через конец большой оси, ей сообщается небольшая скорость δV в направлении нормали. Покажите, что тангенциальное отклонение по истечении четверти периода обращения равно $K^{-1/2} \delta V$, где K — гравитационный параметр. Покажите далее, что тангенциальная скорость δV , сообщенная по истечении четверти периода, вызывает нормальное отклонение такой же величины $K^{-1/2} \delta V$.

14. В задаче трех тел единицы измерений выбраны таким образом, что интеграл энергии имеет вид

$$\frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2) = \frac{1}{r_{23}} + \frac{1}{r_{31}} + \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r},$$

где r_{ij} — расстояние между телами, имеющими скорости V_i и V_j , а r — положительная постоянная. Покажите, что момент количества движения системы относительно центра инерции не превышает по величине $3\sqrt{\frac{r}{2}}$.

15. Точка единичной массы движется свободно на плоскости под действием нескольких притягивающих центров по закону Ньютона. Пусть $V(x, y)$ означает полную потенциальную энергию точки. Покажите, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \iint \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln(h - V) \right] dx dy,$$

распространенный на площадь, ограниченную периодической траекторией с постоянной энергией h (причем центры сил должны быть исключены из области интегрирования при помощи окружностей сколь угодно малых радиусов), равен уменьшенному на две единицы числу центров, заключенных внутри траектории.

16. Материальная точка движется под действием отталкивающего центра. Покажите, что траектории всегда имеют гиперболический характер и никогда не окружают центра сил. Покажите далее, что асимптоты не проходят через центр сил, если работа, необходимая для приведения точки в ее положение из бесконечности, конечна; если же эта работа бесконечна, то асимптоты проходят через центр сил и продолжительность всего движения может быть конечной.

17. Материальная точка движется в пространстве под действием двух ньютоновских центров притяжения. Покажите, что когда постоянная энергии имеет отрицательное значение, точка описывает спираль вокруг линии центров, расположенную внутри трубки, образованной двумя эллипсоидами вращения и двумя гиперболами вращения с общими фокусами в центре сил. Покажите далее, что когда постоянная энергии равна нулю или положительна, точка описывает спираль, расположенную внутри области, образованной одним эллипсоидом и

двумя уходящими в бесконечность полостями гиперболоидов той же софокусной системы.

18. Занимаясь исследованием устойчивости треугольных точек либрации общей задачи трех тел-точек в случае, когда стороны равностороннего треугольника, образованного тремя точечными массами m_1, m_2, m_3 остаются постоянными, Н. Е. Жуковский предложил в качестве независимой переменной вместо времени t использовать угол φ , образованный одной из сторон треугольника с какой-нибудь неподвижной прямой, расположенной в плоскости движения тел. Взяв в качестве возмущений x_1, x_2, x_3 изменения длин сторон треугольника, составьте выражение для кинетической энергии системы в возмущенном движении, сохраняя в этом выражении лишь члены не выше второго порядка относительно x_1, x_2, x_3 и их производных по φ .

19. Используя уравнения в оскулирующих элементах, покажите, что средняя скорость изменения большой полуоси орбиты спутника Земли, вызываемого только полярным сжатием, за один период обращения равна нулю.

20. Как известно, истинное значение аргумента перигелия орбиты Меркурия растет на $43''$ за столетие быстрее, чем это должно быть согласно уравнениям ньютоновской механики. Покажите, что релятивистский эффект в аргументе перигелия Меркурия можно объяснить, оставаясь в рамках классической механики, если предположить существование дополнительной центральной возмущающей силы F , действующей на Меркурий со стороны Солнца и изменяющейся по закону

$$F = -\frac{3\sigma^2}{c^2 r^4},$$

где r — расстояние между Солнцем и Меркурием, c — скорость света, σ — постоянная площадей.

21. Определите «первую» (V_I) и «вторую» (V_{II}) космические скорости при движении в экваториальной плоскости Земли с учетом второй зональной гармоники земного потенциала тяготения.

22. Используя кеплеровские оскулирующие элементы, вычислите возмущение за один оборот в драконическом периоде обращения спутника T_{Ω} , вызванное второй зональной гармоникой поля тяготения сжатой планеты (драконический период определяет время движения спутника между двумя последовательными прохождениями через восходящий узел орбиты).

23. Рассчитайте полезную нагрузку (без учета 900 кг систем наведения и управления) для каждой из девяти четырехступенчатых ракет-носителей, имеющих одинаковый стартовый вес 454 Т и одинаковую характеристическую скорость $V_{\text{хар}} = 13,65 \text{ км/сек}$, но разные скорости истечения $V_r = 2500; 3000; 3500 \text{ м/сек}$ (одинаковые для всех ступеней) и разные конструктивные характеристики $S = 0,05; 0,085; 0,12$ (одинаковые для всех ступеней). Пренебрегая гравитационными и аэродинамическими потерями, определите, какая из этих

девяти ракет может быть использована в качестве ракеты-носителя для «чистого» веса полезной нагрузки 1,36 T .

24. Располагаемая характеристическая скорость одноступенчатой ракеты-носителя равна V_1 , а требуемая характеристическая скорость заданного межпланетного маневра равна V_2 , причем $V_1 < V_2 < 2V_1$. Для осуществления операции предполагается использовать x одинаковых ракет-заправщиков, не несущих кроме топлива никакой полезной нагрузки. При заданном коэффициенте конструкции s определите, при какой скорости полета V следует осуществить передачу топлива от заправщиков к носителю, чтобы число x было минимальным. Найдите x_{\min} . Скорость истечения газов примите равной единице.

25. Пусть z — число Циолковского одноступенчатой баллистической ракеты, запускаемой с поверхности Земли с целью достижения максимальной дальности. Считая Землю невращающимся шаром радиуса R и пренебрегая сопротивлением атмосферы, покажите, что при постоянной скорости истечения газов V_r максимальная дальность L_{\max} определяется по формуле

$$L_{\max} = 2R \arcsin \frac{\ln^2 z}{2V^2 - \ln^2 z}, \quad V = \frac{K}{RV_r},$$

а оптимальный угол стрельбы ψ , образуемый вектором скорости с вертикалью, равен

$$\psi = \frac{1}{4} (\pi + \varphi),$$

где φ — угловая геоцентрическая дальность, K — гравитационный параметр поля тяготения Земли.

26. Решите задачу 9.1.13, не считая Землю плоской, а лишь полагая $r \approx R$ и $g = g_0$, где r — модуль радиуса-вектора ракеты, проведенного из центра Земли, R — радиус Земли, g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли (так называемое «центральное однородное поле»). Установите связь между скоростью ракеты V и углом траектории ψ .

27. Для того чтобы искусственный спутник Земли двигался по окружности, концентрической с одной из параллелей Земли, ему с помощью реактивного двигателя сообщается постоянное по модулю реактивное ускорение ω , все время направленное вдоль оси вращения планеты. Найдите зависимость между модулем геоцентрического радиуса-вектора r и широтой спутника φ , учитывая вторую зональную гармонику в разложении потенциала тяготения Земли.

28. Космический аппарат стартует с круговой кеплеровской орбиты под действием постоянного по модулю радиального реактивного ускорения. Установите зависимость между модулем радиуса-вектора космического аппарата и временем движения, а также модулем радиуса-вектора и полярным углом (см. задачу 10.1.1). За единицы длины, скорости и ускорения возьмите соответственно радиус начальной

круговой орбиты, скорость и гравитационное ускорение при движении по ней.

29. Космический аппарат приближается к планете по гиперболической орбите, имея заданную величину скорости на бесконечности V_∞ . В перигеете орбиты космическому аппарату сообщается тормозной касательный импульс с целью перевода аппарата на эллиптическую орбиту заданного эксцентриситета e . Покажите, что величина необходимого импульса ΔV определяется по формуле

$$\Delta V = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2K}{r_{\text{п}}}} - \sqrt{\frac{K(1+e)}{r_{\text{п}}}},$$

где K — гравитационный параметр планеты, а $r_{\text{п}}$ — модуль радиуса-вектора перигеета.

30. Два спутника движутся по компланарным, но не соосным и не пересекающимся эллиптическим орбитам. Пусть F_1 и F_2 — свободные фокусы орбит спутника 1 и спутника 2 соответственно, а a_1 и a_2 — их большие полуоси. Чтобы спутник 1 мог достичь спутника 2 в точке P , ему сообщается в точке Q его орбиты необходимый импульс скорости. Покажите, что если орбитой перелета является эллипс, касающийся начальной орбиты в точке Q , а конечной орбиты в точке P , то свободный фокус орбиты перелета расположен на эллипсе, имеющем большую полуось $|a_1 - a_2|$ и точки F_1 и F_2 в качестве своих фокусов.

31. Перевод космического аппарата с круговой кеплеровской орбиты на эллиптическую заданного эксцентриситета e осуществляется с помощью двух касательных импульсов, из которых второй прикладывается либо в перигее, либо в апогее конечной орбиты. Предполагая, что скорости истечения газов реактивного двигателя в каждом случае различны и равны соответственно V_{r1} и V_{r2} , найдите соотношение между V_{r1} и V_{r2} , при котором переход в перигеет конечной орбиты требует меньшего расхода топлива. Величину e считать достаточно малой.

32. Космический аппарат, находящийся на круговой кеплеровской орбите, должен перейти на гиперболическую орбиту, имея заданную скорость V_∞ на бесконечности. Переход осуществляется по следующей двухимпульсной схеме: первый касательный (тормозной) импульс переводит аппарат на эллиптическую орбиту с перигеем, расположенным внутри исходной круговой орбиты; второй касательный импульс прикладывается в перигее эллиптической орбиты в направлении движения. При каких значениях V_∞ указанный маневр потребует меньшей характеристической скорости, чем переход на гиперболическую орбиту с помощью одного касательного импульса?

33. Космический аппарат, движущийся в центральном ньютоновском поле по эллиптической орбите, переводится на круговую орбиту заданного радиуса r_0 с помощью малой реактивной тяги. Формирование

управляющей команды производится путем сравнения истинной скорости аппарата V с некоторой командной скоростью V_k , после чего реактивная тяга ориентируется в направлении вектора $V - V_k$. Командная скорость V_k определяется как скорость, которую космический аппарат должен был бы иметь, если бы он в данный момент времени находился на эллиптической орбите с заданной величиной радиуса-вектора перигея r_0 и с минимально возможным эксцентриситетом e_{\min} . Покажите, что

$$e_{\min} = \frac{r - r_0}{r + r_0},$$

а командный вектор скорости определяется по формуле

$$V_k = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2Kr_0}{r(r+r_0)}} [r, n],$$

где K — гравитационный параметр центрального поля, а n — единичный вектор, нормальный к плоскости орбиты.

34. Искусственный спутник должен быть выведен на круговую кеплеровскую орбиту радиуса r_0 . Однако вследствие ошибок выведения спутник приобрел расчетную круговую скорость при $r = r_0 + \delta r$, где δr — весьма малая по сравнению с r_0 ошибка выведения. Вычислите новую угловую скорость $\dot{\nu}$ обращения спутника, пренебрегая второй и более высокими степенями δr .

35. Вход космического аппарата в атмосферу планеты должен начаться в перигея его орбиты при заданной высоте H_p . В процессе измерений траектории оказалось, что действительная точка входа будет смещена относительно расчетной на малый планетоцентрический угол $\Delta\varphi$, в связи с чем для ликвидации этого смещения аппарату необходимо сообщить малый корректирующий импульс скорости ΔV , который не изменял бы заданную высоту перигея центра H_p .

Покажите, что с точностью до квадрата величины $\Delta\varphi$ необходимый для коррекции вектор ΔV определяется по формуле

$$\Delta V = \frac{e}{2} \sqrt{\frac{K}{(R+H_p)(1+e)}} \left[(1 - \cos v) i - \frac{2+e-\cos v}{1-\cos v} \sin v \cdot j \right] \Delta\varphi,$$

где K — гравитационный параметр центрального поля, i, j — единичные ортогональные орты (орт i направлен в перигея орбиты), e — эксцентриситет орбиты, v — истинная аномалия точки приложения импульса ΔV , R — радиус планеты.

36. Искусственный спутник Земли движется по эллиптической кеплеровской орбите. В апогее орбиты спутник получает малый касательный импульс скорости ΔV в направлении движения. Покажите,

что с точностью до ΔV^2 высота спутника в перигее $H_{\text{п}}$ увеличивается на величину

$$\Delta H_{\text{п}} = \frac{2T}{\pi} \sqrt{\frac{R+H_{\text{п}}}{R+H_{\text{а}}}} \Delta V,$$

где $H_{\text{а}}$ — высота спутника в апогее, R — радиус Земли, T — период обращения спутника по орбите.

37. Искусственный спутник, движущийся в центральном ньютоновском поле, в некоторой точке A своей орбиты получает малый касательный импульс скорости ΔV в направлении движения. Считая величину ΔV настолько малой, что квадратом ее по сравнению с первой степенью можно пренебречь, покажите, что соответствующее малое изменение Δr модуля радиуса-вектора спутника в функции полярного угла φ , отсчитываемого от точки A , дается формулой

$$\Delta r = \frac{2\rho\sqrt{p}(1 - \cos \varphi)}{\sqrt{K[1 + e \cos(\nu_0 + \varphi)]^2 \sqrt{1 + 2e \cos \nu_0 + e^2}}},$$

где K — гравитационный параметр центрального поля, p , e — фокальный параметр и эксцентриситет орбиты соответственно, ν_0 — истинная аномалия точки A .

38. Решите предыдущую задачу в предположении, что импульс скорости ΔV направлен вдоль радиуса-вектора спутника.

39. Искусственный спутник, движущийся по круговой кеплеровской орбите, получает в некоторой точке A своей орбиты малый касательный импульс скорости ΔV в направлении движения. Предполагая, что период T движения спутника задан, и считая величину ΔV настолько малой, что квадратом ее по сравнению с первой степенью можно пренебречь, определите: а) изменение периода обращения спутника, б) значение полярного угла φ_0 (отсчитываемого от точки A), при котором ошибка по времени движения Δt обращается в нуль, в) значение полярного угла φ_{max} , при котором ошибка по времени в течение первого оборота после приложения импульса принимает максимальное значение.

40. Два спутника движутся в центральном ньютоновском силовом поле в одной и той же плоскости. Пусть a_i , e_i , τ_i ($i=1, 2$) соответственно большая полуось, эксцентриситет и время прохождения через перицентр каждого из спутников. Определите положение спутников на орбите в момент времени, когда расстояние между ними будет минимальным, предполагая, что эксцентриситеты орбит e_i настолько малы, что величинами e_i^2 по сравнению с e_i можно пренебречь.

41. Ракета движется под действием реактивной силы в однородном поле с гравитационным ускорением g . Пусть r_0 и r_1 — радиусы-векторы начальной и конечной точек траектории ракеты соответственно, а V_0 и V_1 — скорости ракеты в этих точках. Покажите, что в задаче

на быстродействие p -траектория (p — вектор сопряженных переменных) лежит в плоскости, параллельной векторам

$$r_1 - r_0 - V_0 T - \frac{1}{2} g T^2, \quad V_1 - V_0 - g T,$$

где T — время перелета.

42. Ракета движется под действием лишь реактивной силы. Пусть z — число Циолковского, необходимое для выполнения заданного маневра. Покажите, что длина l дуги годографа вектора скорости, соответствующей маневру, связана с z соотношением

$$V_r \ln z = l,$$

где V_r — постоянная скорость истечения.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I

§ 1

1. $3^h 13^m 25^s$.
2. $24^\circ 16' 30''$.
3. 6371 км.
4. 3736 км.

5. Максимальное расхождение между геодезической и геоцентрической широтами достигает $11',5$ на географической параллели $\varphi = 45^\circ$.

6. Принимая за единицу длины средний радиус Земли, для геоцентрических прямоугольных координат пункта будем иметь $x = 0,76728894$, $y = 0$, $z = 0,63952347$.

7. Принимая средний радиус Марса за единицу длины, по формулам вида (1.1.2) — (1.1.3) вычисляем $x = 0,86759434$, $z = 0,49425032$.

8. Пусть x , z — геоцентрические прямоугольные координаты спутника. Обозначим через B геодезическую широту спутника, а через φ' — геоцентрическую широту подспутниковой точки. Пусть, далее, r — геоцентрический радиус-вектор спутника, r' — геоцентрический радиус-вектор подспутниковой точки, H — геодезическая высота спутника, а δ — его геоцентрическая широта (склонение). Тогда находим:

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \delta = \operatorname{arctg} \frac{z}{x} \quad (-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ).$$

Затем вычисляем

$$r' = a_3 \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi'}},$$

$$B = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi' \right),$$

$$H = \sqrt{r^2 - r'^2 \sin^2 (B - \varphi')} - r' \cos (B - \varphi'),$$

$$\Delta\varphi = \operatorname{arcsin} \left[\frac{\pi}{2} \sin (B - \varphi') \right],$$

причем в первом приближении в этих формулах можно принять $\varphi' = \delta$. Далее вычисляем $\varphi' = \delta - \Delta\varphi$ и повторяем цикл вычислений по последней группе формул. Процесс итерации повторяется до тех пор, пока φ' и B не будут вычислены с необходимой степенью точности.

§ 2

1. Воспользуйтесь формулой пяти элементов (1.2.3) и теоремой синусов (1.2.2).

$$2. \arccos \left(1 - 2 \sin^2 \gamma \sin^2 \frac{i}{2} \right) = 59^\circ 29' 36''.$$

3. Географическая широта спутника равна

$$\arctg [\operatorname{tg} i \sin (\lambda_2 - \lambda_1)].$$

Угловое расстояние спутника от станции наблюдения составляет

$$\arccos [\sin \varphi \sin \varphi_2 + \cos \varphi \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)].$$

Указание. Из прямоугольного сферического треугольника с вершинами в подспутниковой точке, ее проекции на экватор и точке пересечения плоскости орбиты спутника с экватором с помощью формул (1.2.7) и (1.2.8) найдите географическую широту подспутниковой точки. Затем рассмотрите сферический треугольник с вершинами в северном полюсе Земли, станции наблюдения и подспутниковой точке и с помощью теоремы косинусов найдите угловое расстояние подспутниковой точки от станции наблюдения.

4. Пусть A_0 и A_1 — подспутниковые точки, соответствующие моментам t_0 и t_1 , а B_0 и B_1 — проекции этих точек на лунный экватор. Обозначим через C точку пересечения траектории спутника на лунной поверхности с экватором. Из прямоугольного сферического треугольника $\Delta A_0 B_0 C$ находим стороны $CA_0 = u_0$ и $CB_0 = \alpha_0$:

$$\sin u_0 = \sin \varphi_0 \operatorname{cosec} i, \quad \sin \alpha_0 = \operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{ctg} i. \quad (*)$$

Аналогично из сферического треугольника $\Delta A_1 B_1 C$ получим

$$\sin \varphi = \sin u_1 \sin i, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} u_1 \cos i, \quad (**)$$

где $CA_1 = u_1$, $CB_1 = \alpha_1$.

Находя из (*) u_0 и учитывая перемещение спутника вдоль орбиты за время $t_1 - t_0$, будем иметь

$$u_1 = u_0 + \frac{2\pi}{P} (t - t_0).$$

Тогда из первой формулы (**) можно получить селеноцентрическую широту спутника в момент t . Из формул (*) и (**) нетрудно найти α_0 и α_1 . Тогда селеноцентрическую долготу спутника λ в момент t можно вычислить по формуле

$$\lambda = \lambda_0 + \alpha_1 - \alpha_0.$$

5. $R_3 \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\lambda)^2 \cos^2 \varphi}$.

Указание. Рассмотрите сферический треугольник с вершинами в северном полюсе Земли, расчетном и фактическом положениях точки приземления космического корабля и воспользуйтесь теоремой косинусов. Упростите полученную формулу, сохранив в ней только члены первого порядка малости относительно величин $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$.

6. $81^\circ 13' 53''$.

7. 878 км.

8. 16 900 км.

Указание. Рассмотрите сферический треугольник, вершинами которого служат: точка старта, точка падения и северный полюс Земли.

9. Пусть O — центр Земли, R — ее радиус, P — наблюдатель, S — спутник, T — подспутниковая точка (рис. P.1.1). Обозначим $\angle POS$ через c , $\angle OSP$ — через β . По теореме синусов (рис. P.1.1)

$$\frac{R}{\sin \beta} = \frac{R+H}{\sin (90^\circ + \eta)}$$

Отсюда находим

$$\beta = 56^\circ 42', \quad c = 180^\circ - \beta - (90^\circ + \eta) = 3^\circ 18'.$$

В прямоугольном сферическом треугольнике $\triangle CPT$ (C — северный полюс Земли) имеем

$$\sphericalangle PT = c, \quad \sphericalangle CP = 90^\circ - \varphi_0.$$

С помощью правила Непера записываем формулы

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos c, \quad \operatorname{tg} (\lambda - \lambda_0) = \operatorname{tg} c \sec \varphi_0.$$

Находим $\varphi = 29^\circ 57'$, $\lambda = 103^\circ 48'$.

10. Наряду с вращающейся Землей рассмотрим «невращающуюся Землю», т. е. воображаемый шар, который неизменно занимает в пространстве то же положение, которое занимала вращающаяся Земля в момент t_1 . В момент t_1 точка A_1 вращающейся Земли совпадает с некоторой точкой N_1 невращающейся Земли; в момент t_2 точка A_2 совпадает с некоторой точкой N_2 невращающейся Земли.

Пусть C — северный полюс, B_1 и D — точки пересечения экватора с меридианом, проходящим через N_1 , и с проекцией орбиты на поверхность Земли. Обозначим углы N_1CN_2 , CN_1N_2 и дугу N_1N_2 соответственно через γ , α , c . За промежуток времени $t_2 - t_1$ меридиан, проходящий через точку A_2 , успел совершить вокруг земной оси поворот на угол

$$\delta = \frac{360^\circ}{86164} \cdot 30 \cdot 60 = 7^\circ 39'.$$

Поэтому $\gamma = \delta + \lambda_2 - \lambda_1 = 67^\circ 39'$. Из сферического треугольника N_1CN_2 с помощью теорем косинусов и синусов находим

$$\cos c = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \gamma = 0,5978,$$

$$c = 53^\circ 17', \quad \sin \alpha = \frac{\sin \gamma \cos \varphi_2}{\sin c} = 0,5768.$$

Из прямоугольного сферического $\triangle DB_1N_2$ получаем

$$\cos i = \cos \varphi_1 \sin \alpha = 0,4995, \quad i = 60^\circ 02'.$$

11. Пусть R_3 — радиус Земли, A_S — подспутниковая точка, $\varphi_k = \angle SOA_k$ ($k=1, 2$), B_k — точка пересечения экватора с меридианом, проходящим через A_k . Из $\triangle A_1SA_2$ получим

$$\cos \gamma = \frac{SA_1^2 + SA_2^2 - A_1A_2^2}{2SA_1 \cdot SA_2}.$$

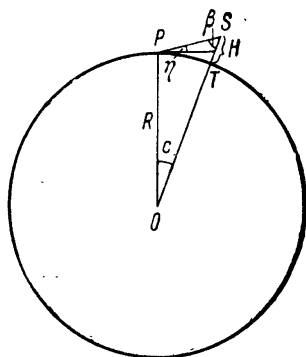
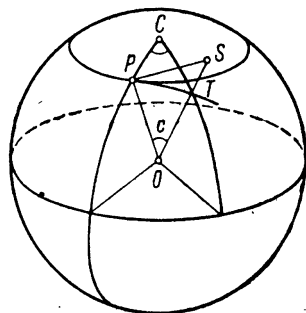


Рис. P.1.1.

Из $\triangle SOA_k$ имеем

$$SA_k^2 = R_S^2 + R_S^2 - 2R_S R_S \cos \psi_k.$$

Из прямоугольного сферического треугольника ASB_kA_k получаем

$$\cos \psi_k = \cos \varphi_k \cos (\lambda_S - \lambda_k).$$

Находим A_1A_2 из

$$\triangle A_1OA_2: A_1A_2^2 = 2R_S^2 (1 - \cos \delta),$$

где $\delta = \angle A_1OA_2$. Пусть N — северный полюс Земли. Из сферического треугольника A_1NA_2 определяем $\cos \delta$:

$$\cos \delta = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Из полученных соотношений находим γ . Угол $\alpha_k = \angle OSA_k$ легко найти из плоского треугольника SOA_k , в котором известны две стороны и угол между ними.

12. $5^\circ 40'$.

§ 3

1. Да, может.

У к а з а н и е. Спутник будет наблюдаем на данной географической широте φ , если по крайней мере в верхней кульминации его зенитное расстояние не превосходит 90° ($z \leq 90^\circ$). В нашем случае верхняя кульминация происходит к югу от зенита, поэтому $z = \varphi - \delta$, где δ — склонение спутника. Условие видимости сводится к неравенству $\varphi - \delta \leq 90^\circ$. При движении спутника по орбите его склонение будет изменяться в пределах $-i \leq \delta \leq i$. Легко проверить, что для всего этого диапазона склонений условие видимости $\varphi - \delta \leq 90^\circ$ оказывается выполненным.

2. Да.

3. $\varphi = 90^\circ - z + \rho$.

У к а з а н и е. Угловое расстояние между северным полюсом мира и зенитом равно $90^\circ - \varphi$, поэтому $z - \rho = 90^\circ - \varphi$.

4. Может иметь место четыре случая взаимного расположения полюса мира, зенита и кульминирующих спутников.

а) Оба спутника в верхней кульминации находятся между зенитом и точкой юга. Тогда $z_i = \varphi - \delta_i$ ($i = 1, 2$), откуда находятся φ и δ_2 .

б) Оба спутника кульминируют между полюсом мира и зенитом. Искомые величины определяются из уравнений $z_i = \delta_i - \varphi$ ($i = 1, 2$).

в) Первый спутник кульминирует между зенитом и точкой юга, а второй между зенитом и полюсом мира. При этом $z_1 = \varphi - \delta_1$ и $z_2 = \delta_2 - \varphi$.

г) Второй спутник кульминирует между зенитом и точкой юга, а первый — между зенитом и полюсом мира. Тогда $z_1 = \delta_1 - \varphi$ и $z_2 = \varphi - \delta_2$.

Таким образом, если оба спутника кульминируют между зенитом и точкой юга, то $\varphi = z_1 + \delta_1$, $\delta_2 = \delta_1 + (z_1 - z_2)$, если оба спутника кульминируют между зенитом и полюсом мира, то $\varphi = \delta_1 - z_1$, $\delta_2 = \delta_1 + (z_2 - z_1)$, если первый спутник кульминирует между полюсом мира и зенитом, а второй между зенитом и точкой юга, то $\varphi = \delta_1 + z_1$, $\delta_2 = \delta_1 + (z_2 + z_1)$, если второй спутник кульминирует между полюсом мира и зенитом, а первый между зенитом и точкой юга, то $\varphi = \delta_1 - z_1$, $\delta_2 = \delta_1 - (z_2 + z_1)$.

5. $\lambda = 153^\circ 44' 24''$, 7. $\beta = 13^\circ 59' 59''$, 8.

6. $z = 37^\circ 7' 0''$, $A = 84^\circ 20' 9''$.

7. $\alpha = 0^h$, $\delta = 0^\circ$ (точка весеннего равноденствия), $\alpha = 12^h$, $\delta = 0^\circ$ (точка осеннего равноденствия).

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулами преобразования экваториальных координат в эклиптические, положив в них $\lambda = \alpha$, $\beta = \delta$.

8. Искомое геометрическое место точек представляет собой большой круг, проходящий через точки весеннего и осеннего равноденствий и наклоненный к плоскости экватора под углом $\varepsilon/2$.

Указание. Воспользуйтесь формулами преобразования экваториальных координат в эклиптические, положив в них $\lambda = \alpha$. Из первой формулы, вытекающей из теоремы синусов, следует, что $\beta = \pm \delta$. Но случай $\beta = \delta$ был рассмотрен в предыдущей задаче. Обратимся к случаю $\beta = -\delta$. Здесь

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \sin \alpha.$$

$$9. \delta \mathcal{L} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha_1 \operatorname{tg} \delta_2 - \sin \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_1}{\cos \alpha_1 \operatorname{tg} \delta_2 - \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \delta_1}.$$

Указание. Для обоих моментов времени рассмотрите прямоугольный сферический треугольник с вершинами в точке весеннего равноденствия, спутнике и его проекции на небесный экватор. Из формул, связывающих элементы прямоугольного треугольника, находим $\operatorname{tg} \delta_k = \operatorname{tg} i \sin (\alpha_k - \delta \mathcal{L})$ ($k=1,2$), где i — наклонение орбиты, а $\delta \mathcal{L}$ — долгота ее восходящего узла.

10. В четвертом наблюдении допущена ошибка в склонении.

11. Нет, не пройдет.

12. Из $\triangle PES$ (рис. P.1.2.) находим по теореме синусов (1.2.2)

$$r = r_2 \frac{\sin (\lambda'_2 - \lambda_2)}{\sin (\lambda' - \lambda'_2)},$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 360^\circ - \angle PSR = \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \lambda') = 180^\circ + \lambda'. \end{aligned}$$

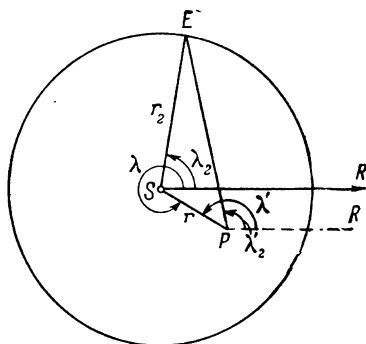


Рис. P.1.2.

13. Пусть (x_v, y_v, z_v) — координаты станции T_v ($v=1,2$); Δ_v — ее расстояние до спутника, $r_v = \overrightarrow{OT}_v$ (O — центр Земли), $\rho_v = \overrightarrow{T}_v \overrightarrow{C} / \Delta_v$, $R = \overrightarrow{OC}$; i, j, k — орты осей координат. Тогда

$$r_v = x_v i + y_v j + z_v k,$$

$$\rho_v = \cos \delta_v \cos \alpha_v \cdot i - \cos \delta_v \sin \alpha_v \cdot j + \sin \delta_v \cdot k,$$

$$R = r_1 + \Delta_1 \rho_1 = r_2 + \Delta_2 \rho_2.$$

Чтобы вычислить Δ_1 , умножим последнее равенство почленно векторно на ρ_2 . Получим

$$\Delta_1 [\rho_1 \rho_2] = [(r_2 - r_1), \rho_2].$$

Найдя отсюда Δ_1 , легко затем определить вектор R , его координаты x, y, z , и его длину.

14. Пусть T — станция наблюдения, C — северный полюс. Из сферического $\triangle CTS_1$ находим $\sphericalangle TS_1$ и $\angle CTS_1$. Азимут спутника равен

$$A = 180^\circ + \angle CTS_1 = 291^\circ 54'.$$

15. Пусть O — центр Земли, C — северный полюс (рис. P.1.3a). В сферическом $\triangle PTC$ обозначим сторону TP через c , а $\angle TPC$ — через α . С помощью

теорем косинусов и синусов (1.2.1), (1.2.2) найдем

$$c = 42^\circ 16', \quad \alpha = 107^\circ 07', \quad A = 180^\circ - \alpha = 72^\circ 53'.$$

Для вычисления высоты h опустим из S на прямую OP перпендикуляр SD

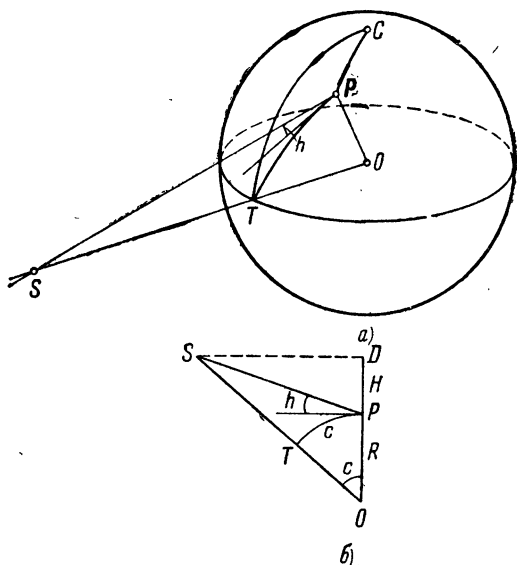


Рис. P.1.3.

(рис. P.1.3, б). Тогда $\angle DSP = h$, $\operatorname{tg} h = \frac{OD - OP}{DS} = \frac{R_S \cos c - R}{R_S \sin c} = 0,87563$,
 $h = 41^\circ 12'$.

§ 4

1. Из таблицы 1 (см. Приложение) юлианских дней находим, что моменту 1985, янв., 0^{h} соответствует 2446066 JD. Поскольку начало юлианского дня приходится на полдень, то в полночь интересующей нас даты имеем 2 446 066,5 JD. Переводя $6^{\text{h}}48^{\text{m}}$ в доли суток, получим $0^{\text{d}},283333$. Окончательно будем иметь 2 446 066,78333 JD.

2. 1970, июнь, 7, $17^{\text{h}}30^{\text{m}}22^{\text{s}},28$ UT.

У к а з а н и е. Рассуждения аналогичны предыдущим.

3. Москва живет по времени третьего часового пояса. Поэтому в Гринвиче в момент наблюдения спутника гражданское время было $10^{\text{h}}10^{\text{m}} - 3^{\text{h}} = 7^{\text{h}}10^{\text{m}}$. Прибавляя к этому времени долготу Москвы, получим гражданское московское время $7^{\text{h}}10^{\text{m}} + 2^{\text{h}}30^{\text{m}} = 9^{\text{h}}40^{\text{m}}$. Тогда среднее солнечное время в Москве будет равно 14 июля 1970 г. $21^{\text{h}}40^{\text{m}}$.

4. Поскольку звездное время равно прямому восхождению светила, находящегося в верхней кульминации, то в момент наблюдения в пункте A звездное время равнялось $12^{\text{h}}10^{\text{m}}03^{\text{s}}$, а в пункте B время превышало время пункта A на разность долгот: $12^{\text{h}}10^{\text{m}}03^{\text{s}} - 2^{\text{h}}1^{\text{m}}18^{\text{s}},57 + 2^{\text{h}}30^{\text{m}}17^{\text{s}} = 12^{\text{h}}39^{\text{m}}01^{\text{s}},03$. Интервал 2^{h} среднего времени соответствует интервалу $2^{\text{h}}19^{\text{s}},713$ звездного времени.

Поэтому звездное время в пункте B в момент наблюдения и искомое прямое восхождение равняются $14^{\text{h}}39^{\text{m}}20^{\text{s}},74$.

5. Из Астрономического Ежегодника СССР (или с помощью формулы (1.4.3) находим звездное время в среднюю гринвичскую полночь 12 октября 1962 г. Оно равно $1^{\text{h}}20^{\text{m}}21^{\text{s}},9$. Затем переводим интервал среднего времени $10^{\text{h}}15^{\text{m}}30^{\text{s}}$ в единицы звездного времени. В результате получим $10^{\text{h}}17^{\text{m}}11^{\text{s}},1$. В рассматриваемый момент всемирного времени звездное время в Гринвиче составит $10^{\text{h}}15^{\text{m}}30^{\text{s}} + 1^{\text{h}}20^{\text{m}}21^{\text{s}},9$. Искомое звездное время равно $14^{\text{h}}06^{\text{m}}08^{\text{s}},9$.

6. Поясное время $6^{\text{h}}44^{\text{m}}08^{\text{s}},6$, декретное время $7^{\text{h}}44^{\text{m}}08^{\text{s}},6$.

У к а з а н и е. Вычислим среднее солнечное время в Гринвиче $6^{\text{h}}40^{\text{m}}30^{\text{s}},0 - 2^{\text{h}}56^{\text{m}}21^{\text{s}},4 = 3^{\text{h}}44^{\text{m}}08^{\text{s}},6$. Так как $\lambda = 2^{\text{h}}56^{\text{m}}21^{\text{s}},4 > 2^{\text{h}}30^{\text{m}}$, то наблюдатель расположен в третьем часовом поясе. Поэтому поясное время равно $3^{\text{h}}44^{\text{m}}08^{\text{s}},6 + 3^{\text{h}} = 6^{\text{h}}44^{\text{m}}08^{\text{s}},6$. Декретное время превышает поясное на час.

7. Из Астрономического Ежегодника СССР на 1957 г. по моменту верхней кульминации Солнца на гринвичском меридиане находим уравнение времени для истинного гринвичского полудня:

$$\text{октябрь 24} - 15^{\text{m}}44^{\text{s}}, \quad \text{октябрь 25} - 15^{\text{m}}52^{\text{s}}.$$

Находим истинное солнечное время в Гринвиче в рассматриваемый момент $7^{\text{h}}54^{\text{m}}15^{\text{s}},6 - 3^{\text{h}}20^{\text{m}}30^{\text{s}},2 = 4^{\text{h}}12^{\text{m}}14^{\text{s}},2$. Интерполируем уравнение времени на найденный момент истинного солнечного времени в Гринвиче: $-15^{\text{m}}46^{\text{s}}$. Тогда среднее солнечное время равно $7^{\text{h}}54^{\text{m}}15^{\text{s}},6 - 15^{\text{m}}46^{\text{s}} = 7^{\text{h}}38^{\text{m}}29^{\text{s}},6$.

8. Из Астрономического Ежегодника СССР на 1957 г. находим звездное время в среднюю гринвичскую полночь 1 марта 1957 г.: $10^{\text{h}}34^{\text{m}}07^{\text{s}},9$. Вычисляем редукцию за долготу:

$$\lambda/24 \cdot 3^{\text{m}}56^{\text{s}},555 = 44^{\text{s}},4.$$

Тогда звездное время в местную среднюю полночь будет равно $10^{\text{h}}34^{\text{m}}07^{\text{s}},9 - 44^{\text{s}},4 = 10^{\text{h}}33^{\text{m}}23^{\text{s}},5$. От местной средней полуночи до данного момента прошло $1^{\text{h}}42^{\text{m}}06^{\text{s}},5$ звездного времени. Переводим этот промежуток в единицы звездного времени:

$$1^{\text{h}}42^{\text{m}}06^{\text{s}},5 \text{ звездного времени} = 1^{\text{h}}41^{\text{m}}49^{\text{s}},8 \text{ среднего времени.}$$

9. Из Астрономического Ежегодника СССР на 1960 г. находим звездное время в среднюю гринвичскую полночь 31 октября: $2^{\text{h}}37^{\text{m}}10^{\text{s}},75$. В месте наблюдения местная полночь наступает на $6^{\text{h}},012$ ранее, чем в Гринвиче. Так как звездное время опережает среднее за один час на $9^{\text{s}},856$, то в среднюю полночь в пункте наблюдения звездное время будет равно $2^{\text{h}}37^{\text{m}}10^{\text{s}},75 - 9^{\text{s}},856 \cdot 6,012 = 2^{\text{h}}36^{\text{m}}10^{\text{s}},49$. Находим местное время в момент наблюдения: $19^{\text{h}}47^{\text{m}}23^{\text{s}},7 - 2^{\text{h}}30^{\text{m}}17^{\text{s}} + 6^{\text{h}}00^{\text{m}}40^{\text{s}} = 23^{\text{h}}17^{\text{m}}46^{\text{s}},7$. Переводим интервал среднего времени в единицы звездного времени: $23^{\text{h}}21^{\text{m}}36^{\text{s}},32$. Тогда местное звездное время равно $2^{\text{h}}36^{\text{m}}10^{\text{s}},49 + 23^{\text{h}}21^{\text{m}}36^{\text{s}},32 = 25^{\text{h}}57^{\text{m}}46^{\text{s}},81 = 1^{\text{h}}57^{\text{m}}46^{\text{s}},81$.

§ 5

1. Предварительно оцените разность значений рефракции для космического аппарата и звезды и покажите, что этой разностью можно пренебречь. Далее, подставляя в формулу для рефракции (1.5.1) числовые значения из условий задачи, найдем, что для α Волопаса рефракция составляет $54''$. По-

этому истинное значение зенитного расстояния космического аппарата будет равно $40^{\circ}57'48'' - 2' + 54'' = 40^{\circ}56'42''$.

2. Рефракция по склонению максимальна, если светило находится в меридиане, и равна нулю, если параллактический угол равен 90° .

У к а з а н и е. Рассмотрите сферический треугольник с вершинами в северном полюсе мира, зените и светиле (*параллактический треугольник*). За счет рефракции светило смещается вдоль вертикала в сторону зенита на дугу R . Обозначая угол с вершиной в светиле (*параллактический угол*) через σ и проектируя рефракционное смещение на круг склонений, т. е. на дугу «полюс — светило», будем иметь

$$\Delta\delta = R \cos \sigma,$$

где $\Delta\delta$ — изменение склонения за счет рефракции. Очевидно, что влияние рефракции на склонение будет максимальным по величине, если параллактический угол равен либо 0 , либо 90° , т. е. когда светило находится в меридиане. Рефракция не влияет на склонение, если параллактический угол равен 90° .

3. Рефракция по прямому восхождению равна нулю, если светило находится в верхней или нижней кульминации.

У к а з а н и е. Как и в предыдущей задаче, рассмотрите параллактический треугольник и найдите проекцию рефракционного смещения на суточную параллель. Тогда рефракция по часовому углу будет равна $\Delta t = -\Delta z \sin \sigma \sec \delta$. Но приращение прямого восхождения равно $\Delta\alpha = -\Delta t$. Тогда находим, что рефракция в прямом восхождении равна нулю, если светило проходит через меридиан места наблюдения.

4. У к а з а н и е. Воспользуйтесь указаниями к двум предыдущим задачам.

5. Рассмотрим сферический треугольник с вершинами в зените и точках нахождения космических аппаратов на небесной сфере. Если обозначить через γ истинное угловое расстояние между аппаратами, через R_1 и R_2 — рефракционные смещения первого и второго аппаратов, то с помощью теоремы косинусов можно найти

$$\cos \gamma = \cos(z_2 + R_2) \cos(z_1 + R_1) + \sin(z_2 + R_2) \sin(z_1 + R_1) \cos(A_2 - A_1).$$

Полагая теперь $z_2 = z_1 + \Delta z$ и $\gamma = \gamma_B + \Delta\gamma$, где γ_B — видимое угловое расстояние между аппаратами, и ограничиваясь малыми первого порядка относительно R_1 , R_2 , Δz , $\Delta\gamma$, получим разность между истинным и видимым угловым расстоянием

$$\Delta\gamma = (R_2 + R_1 + \Delta z) \sin 2z_1 \sin^2 \frac{A_2 - A_1}{2} \operatorname{cosec} \gamma_B.$$

6. Воспользуйтесь формулами (1.5.4) редукции экваториальных координат за годичную аберрацию, заменив в них прямые восхождения на эклиптические долготы, склонения — на широты. Широту Солнца принять равной нулю. Введите в качестве координат следующие величины:

$$x = (\lambda' - \lambda) \cos \beta, \quad y = \beta' - \beta,$$

т. е. ось x направьте по малому кругу, параллельному эклиптике, выбрав положительное направление в сторону возрастания долгот, а ось y направьте по большому кругу, проходящему через космический объект и полюс эклиптики, выбрав положительное направление в сторону возрастания эклиптических широт. Тогда формулы редукции эклиптических координат переписуется в виде

$$y = \Delta\beta = -\mu \sin \beta \cos(\lambda - \lambda_{\odot}), \quad \Delta\lambda = -\mu \sec \beta \sin(\lambda - \lambda_{\odot})$$

и будут определять аберрационный эллипс. Большая ось его будет располагаться по малому кругу, а малая ось — по кругу широт.

9. $0^{\circ}, 02$.

10. $\Delta\alpha = 0^s, 7, \Delta\delta = -1'', 6.$

11. Расстояние от Луны до Земли изменяется в пределах от $363 \cdot 10^3$ км до $405 \cdot 10^3$ км.

12. Аберрационное смещение звезды равно нулю в те моменты, когда скорость Земли коллинеарна направлению на звезду.

13. Аберрация влияет только на прямое восхождение. Склонение остается неизменным.

У к а з а н и е. См. формулы (1.5.4).

14. $\alpha = 0^h 46^m 43^s, 48, \delta = 57^\circ 36' 23'', 8.$

У к а з а н и е. Используйте формулы (1.5.6).

15. $23'', 28.$

16. $\alpha = 14^h 42^m 02^s, \delta = 10^\circ 37' 12'', 1.$

17. $\Delta\alpha = 0, \Delta\delta = -0'', 23.$

У к а з а н и е. Примените формулы (1.5.15).

Г Л А В А II

§ 1

1. Величина fm_1m_2/r^2 имеет размерность силы, поэтому $[f] = [l]^3 [t]^{-2} [m]^{-1}$. Отсюда следует, что за единицу времени необходимо принять $1/\sqrt{f}$. В системе CGS $f = 6,669 \cdot 10^{-8} = 1/3862^2$. Тогда единица времени должна быть равна 3862 сек среднего солнечного времени (*натуральный час*).

2. $126,5 \cdot 10^6$ км³/сек.

3. Сила солнечного притяжения вдвое превосходит тяготение Земли.

4. $398\ 600$ км³/сек².

У к а з а н и е. Ускорение силы тяжести определяется гравитационным ускорением $g_0 = fm_3/a_3^2$, где m_3 — масса Земли, и переносным ускорением $a_e = \omega^2 a_3$, где ω — абсолютная угловая скорость суточного вращения Земли. Период вращения Земли составляет 86 400 сек звездного времени, поэтому

$$a_e = \omega^2 a_3 = \left(\frac{2\pi}{86\ 400} \right)^2 6378,165 = 0,0339 \text{ м/сек}^2.$$

Тогда $g_0 = g - a_e = 9,8143 \text{ м/сек}^2$. Затем можно получить значение гравитационного параметра Земли.

5. Четыре материальных шара в вершинах квадрата притягивают примерно на 10% слабее, чем частица массы $4m$, помещенная в центре квадрата.

$$7. U = \frac{fm}{2l} \ln \left| \frac{l-x + \sqrt{(l-x)^2 + y^2 + z^2}}{l+x - \sqrt{(l+x)^2 + y^2 + z^2}} \right|.$$

У к а з а н и е. Начало координат возьмите в середине отрезка, а ось абсцисс направьте вдоль отрезка.

8. Воспользуйтесь результатами предыдущей задачи.

9. Сила притяжения направлена к середине дуги, а ее модуль равен $2f\sigma \sin \alpha/R$

10. $2f\sigma/h.$

У к а з а н и е. Элемент dx притягивает точку P с силой $dF = f\sigma dx/(PE)^2$, где σ — плотность отрезка. Из подобия $\triangle PEF$ и $\triangle PGK$ (рис. P.2.1)

$$dx = \frac{PE}{PG} GK.$$

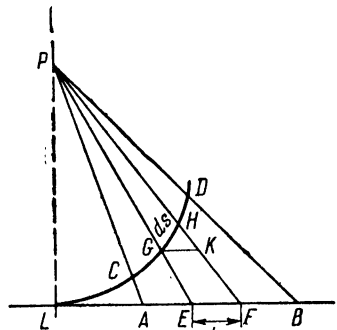


Рис. P.2.1.

Тогда

$$dF = f\sigma \frac{GK}{PE \cdot PG}.$$

Так как $\triangle PLE \sim \triangle GHK$, то $GK = \frac{PE}{PL} ds$. Поэтому

$$dF = f\sigma \frac{ds}{PL \cdot PG} = \frac{f\sigma ds}{(PG)^2}.$$

Отсюда путем интегрирования придем к требуемому результату.

12. Выделяя произвольный элемент массы $\sigma ds = \sigma R d\bar{\lambda}$, отстоящий от внешней точки $P(r, \varphi, \lambda)$ на расстоянии $\Delta = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi \cos(\bar{\lambda} - \lambda)}$ (обозначения указаны на рис. P.2.2), силовую функцию можно представить в виде

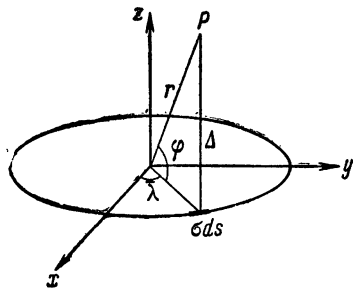


Рис. P.2.2.

$$U = f \int_0^{2\pi} \frac{\sigma R d\bar{\lambda}}{\Delta}.$$

Полагая $\psi = \bar{\lambda} - \lambda$, с учетом соображений симметрии находим

$$U = fR\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \psi \cos \varphi}}.$$

Путем замены $\psi = \pi - 2\vartheta$ преобразуем предыдущую формулу к виду

$$U = 4f\sigma R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \cos \varphi - 4rR \cos \varphi \sin^2 \vartheta}}.$$

Полученный эллиптический интеграл можно преобразовать к канонической форме

$$U = \frac{4f\sigma R}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \cos \varphi}} K(k),$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, а

$$k^2 = \frac{4rR \cos \varphi}{r^2 + R^2 + 2rR \cos \varphi}.$$

13. У к а з а н и е. Воспользуйтесь решением предыдущей задачи.

14. Возьмем систему координат с началом в центре диска, ось аппликат которой направлена вдоль прямой, проведенной через центр диска перпендикулярно его плоскости. Обозначим полярные координаты текущей точки диска через r, φ . Тогда элемент массы будет равен $dm = \sigma r dr d\varphi$. Силовая функция диска в точке, лежащей на оси аппликат z , равна

$$U(z) = f \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\sigma r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Интегрированием получим

$$U(z) = 2\pi f\sigma (\sqrt{a^2 + z^2} - |z|).$$

Дифференцируя эту формулу по z , найдем силу притяжения

$$F_z = 2\pi f\sigma \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \text{sign } z \right).$$

15. У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатами предыдущей задачи и пренебрегите малыми величинами порядка z/a .

16. Тело ограничено поверхностью $r = \varphi(z)$ и плоскостями $z = l$ и $z = l + h$, перпендикулярными оси вращения тела, принятой за ось z (рис. P.2.3). Величину силы притяжения в точке, которую примем за начало координат, найдем, разбив тело на элементарные слои плоскостями $z = \text{const}$. Пользуясь результатами задачи 14, получаем искомую силу

$$F = 2\pi f\sigma \left[h - \int_l^{l+h} \frac{z dz}{\sqrt{\varphi(z) + z^2}} \right].$$

17. $F = \frac{2}{3} \pi f\sigma h \left(3 - \sqrt{\frac{2h}{r}} \right).$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатами задачи 16.

18. $F = 2\pi f\sigma h (1 - \cos \alpha).$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатами задачи 16.

19. У к а з а н и е. Можно воспользоваться результатами задачи 16.

20. $F = 2\pi f\sigma \left[h - \sqrt{h^2 + 2ph} + p \ln \frac{h+p + \sqrt{h^2 + 2ph}}{p} \right].$

21. а) $\frac{2}{3} \pi f\sigma R$, б) 0, в) $\frac{4}{3} \pi f\sigma R$.

22. $\text{tg } \lambda = \frac{\pi\sigma_1 r}{2(\pi\sigma_2 R - \sigma_1 r)} \approx \frac{\sigma_1 r}{2\sigma_2 R}$, где λ — угол отклонения от вертикали.

23. 1) $\frac{F}{F'} = \frac{\sqrt[3]{36\alpha^2}}{1 + \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}$, где $\alpha = h/R$.

3) Максимум отношения F/F' равен 1,0068 и имеет место при $\alpha = 1,6404$, являющемся корнем уравнения $\alpha^2 - \frac{9}{4}\alpha + 1 = 0$.

4) Максимальная сила притяжения F отличается от силы F' примерно на 1%.

У к а з а н и е. Сила притяжения шара радиуса r и плотности σ на его поверхности равна $F = \frac{4}{3} \pi f\sigma r$, а сила притяжения цилиндром точки, находящейся в центре его основания, будет

$$F' = 2\pi f\sigma (h + R - \sqrt{h^2 + R^2}) = \frac{4\pi f\sigma h r}{h + R + \sqrt{h^2 + R^2}}.$$

Поскольку шар и цилиндр равновелики, то $4r^2 = 3hR^2$, и поэтому

$$\frac{F}{F'} = \frac{\sqrt[3]{36\alpha^2}}{1 + \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad \text{где } \alpha = h/R,$$

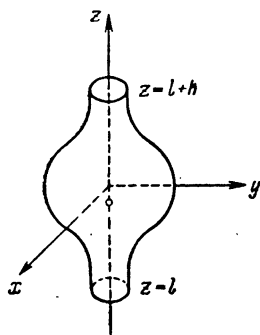


Рис. P.2.3.

24. $U = \frac{f}{n-1} \int \frac{dm}{\Delta^n}$, где dm — элемент массы, а Δ — расстояние от этого элемента до рассматриваемой точки пространства.

25. Однородная сфера с центром в заданной точке

$$U_{\max} = f\sigma \sqrt[3]{\frac{9\pi V^2}{2}}.$$

Указание. Данная точка не может быть внешней по отношению к притягивающей массе, ибо при уменьшении расстояния между ней и массой потенциал бы возрастал. Притягиваемая точка должна быть равноудалена от всех точек тела. Следовательно, притягивающая масса равномерно распределена на сфере с центром в заданной точке. Если R — радиус сферы, то максимум потенциала определится из соотношений

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad U = 2\pi f\sigma R^2.$$

26. Тело ограничено поверхностью вращения. Уравнение меридионального сечения $r^2 = \kappa^2 \cos \varphi$, где $\kappa = \text{const}$.

Указание. Покажите, что масса должна располагаться внутри поверхности вращения с осью, проходящей через заданную точку пространства. Воспользуйтесь цилиндрической системой координат с полюсом в заданной точке.

$$27. W = \frac{16}{15} \pi^2 f\sigma R^5.$$

Указание. Искомая энергия равна интегралу $W = \frac{1}{2} \int U \sigma \, d\tau$, распространенному на объем, занятый телом (U — потенциал тела на внутреннюю точку). Вычисление интеграла выполните в сферических координатах.

§ 2

$$1. P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

$$3. m = 4\pi\sigma_0 R^3 \frac{\sin \mu - \mu \cos \mu}{\mu^2 \sin \mu}, \quad l = \frac{2}{3} m R^2 \frac{(3\mu^2 - 6) \sin \mu - (\mu^3 - 6\mu) \cos \mu}{\mu^2 (\sin \mu - \mu \cos \mu)}.$$

5. Указание. Воспользуйтесь уравнением Лапласа и исследуйте точки ветвления этой функции. Если положить $l = m + in$, а $\lambda = m - in$, то при любых действительных значениях m, n функция U будет принимать действительные значения и обладать характеристическими свойствами потенциала тяготения.

6. В силу сферической симметрии силовая функция U будет зависеть только от расстояния r до центра сферического слоя. Так как

$$U''_{xx} = U''_{rr} \frac{x^2}{r^2} + U'_r \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right), \quad U''_{yy} = U''_{rr} \frac{y^2}{r^2} + U'_r \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right),$$

$$U''_{zz} = U''_{rr} \frac{z^2}{r^2} + U'_r \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right),$$

где x, y, z — прямоугольные координаты точки в системе координат с началом в центре слоя, то лапласиан примет вид

$$\Delta U = U''(r) + \frac{2}{r} U'(r).$$

Для внешней точки $\Delta U = 0$, откуда

$$U(r) = c_1 + \frac{c_2}{r},$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования.

Так как $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} rU(r) = fm$, где m — масса притягивающего тела, то $c_1 = 0$, $c_2 = fm$. Поэтому $U(r) = m/r$ при $r \geq R$, причем $m = 4/3\pi\sigma(R^3 - \rho^3)$.

Потенциал на внутреннюю точку ($\rho \leq r \leq R$) удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U = -4\pi\sigma f$, общее решение которого в нашем случае имеет вид

$$U(r) = c_1 + \frac{c_2}{r} - \frac{2}{3} \pi \sigma r^2.$$

Но при $r = R$ значения силовых функций и их первых производных для внутренней и внешней точек должны быть равны, поэтому

$$U(r) = 2\pi f \sigma R^2 - \frac{2}{3} \pi f \sigma r^2 - \frac{4\pi f \sigma \rho^3}{3r}.$$

Наконец, при $r < \rho$ $\Delta U = 0$, откуда

$$U(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}.$$

Приравнивая два последних выражения для силовой функции, а также их производные (при $r = \rho$), находим

$$U(r) = 2\pi f \sigma (R^2 - \rho^2) = \text{const.}$$

7. Плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра шара.

$$8. \frac{1}{\text{ch } u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\text{ch } u \cdot \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \cdot \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \left(\frac{1}{\sin^2 v} - \frac{1}{\text{ch}^2 u} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} = 0.$$

У к а з а н и е. Найдите коэффициенты Ламе, вычислив линейный элемент

$$H_u = H_v = c \sqrt{\text{ch}^2 u - \sin^2 v}, \quad H_\omega = c \text{ch } u \sin v.$$

$$9. \frac{1}{\text{sh } u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\text{sh } u \cdot \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \cdot \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \left(\frac{1}{\text{sh}^2 u} + \frac{1}{\sin^2 v} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} = 0.$$

У к а з а н и е. Найдите коэффициенты Ламе

$$H_u = H_v = c \sqrt{\text{sh}^2 u + \sin^2 v}, \quad H_\omega = c \text{sh } u \sin v$$

и воспользуйтесь выражением лапласиана в криволинейных координатах.

10. Силовую функцию прямолинейного отрезка можно представить в виде

$$U = f \int_{-l}^l \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2 + z^2}},$$

где $\sigma(\xi)$ — плотность в текущей точке $x = \xi$. Преобразуя подынтегральное выражение, получим

$$U = \frac{f}{r} \int_{-l}^l \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\sqrt{1 - 2 \frac{x}{r} \frac{\xi}{r} + \left(\frac{\xi}{r}\right)^2}}.$$

Разлагая теперь стоящую под знаком интеграла производящую функцию полиномов Лежандра в ряд и выполняя интегрирование, находим

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{r^{n+1}} P_n\left(\frac{x}{r}\right),$$

причем

$$A_n = \int_{-l}^l f(\xi) \xi^n d\xi.$$

Отсюда для однородного отрезка с массой m

$$U = fm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^{2k}}{2k+1} P_{2k}\left(\frac{x}{r}\right).$$

11. Пусть разложение силовой функции притяжения имеет вид

$$U(r, z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n\left(\frac{z}{R}\right) & \text{при } r < R, \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n\left(\frac{z}{r}\right) & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Так как эти ряды сходятся абсолютно и равномерно, а разложения единственны, то для определения коэффициентов A_n и B_n достаточно рассмотреть выражение силовой функции для точки, лежащей на оси аппликат. В точках оси z , проходящей через центр окружности и перпендикулярной ее плоскости, потенциал окружности в сферических координатах определяется формулой

$$U = \frac{fm}{\sqrt{R^2 + z^2}},$$

где m — масса окружности.

Если $R > z$, то

$$U = \frac{fm}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{R^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{R^4} + \dots \right).$$

При $R < z$

$$U = \frac{fm}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{R^4}{z^4} + \dots \right).$$

Из этих выражений определяем искомые коэффициенты A_n и B_n .

Окончательно находим

$$U(r, z) = \begin{cases} \frac{fm}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{R^2} P_2\left(\frac{z}{R}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{r^4}{R^4} P_4\left(\frac{z}{R}\right) + \dots \right], & r < R, \\ \frac{fm}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{r^2} P_2\left(\frac{z}{r}\right) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{R^4}{r^4} P_4\left(\frac{z}{r}\right) + \dots \right], & r > R, \end{cases}$$

$$12. U(r, z) = \begin{cases} \frac{2\pi f\sigma}{R} \left[1 - \frac{r}{R} P_1\left(\frac{z}{r}\right) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} P_2\left(\frac{z}{r}\right) - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{r^3}{R^3} P_3\left(\frac{z}{r}\right) + \dots \right], & r < R, \\ 2\pi f\sigma R \left[\frac{1}{2} \frac{R}{r} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{R^3}{r^3} P_2\left(\frac{z}{r}\right) + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{R^5}{r^5} P_4\left(\frac{z}{r}\right) + \dots \right], & r > R. \end{cases}$$

Указание. Силовая функция диска в точках оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, равна

$$U = 2\pi f\sigma \int_0^R \frac{R dR}{\sqrt{R^2 + z^2}} = 2\pi f\sigma (\sqrt{R^2 + z^2} - z).$$

Далее необходимо разложить силовую функцию U в ряд по степеням z/R при $z < R$ и по степеням R/z при $R < z$ и применить прием, изложенный в решении предыдущей задачи.

13. Указание. Возьмите на оси динамической симметрии планеты две точки с комплексно-сопряженными массами $fm/2(1 \pm i\sigma)$, аппликаты которых в планетоцентрической системе координат соответственно будут равны $c(\sigma \pm i)$. Покажите далее, что расстояния от этих двух точек до произвольной точки пространства (x, y, z) выражаются формулами

$$r_1 = c(\operatorname{sh} v - i \sin u) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c\sigma - ci)^2}, \\ r_2 = c(\operatorname{sh} v + i \sin u) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c\sigma + ci)^2},$$

и, принимая это во внимание, преобразуйте данное в задаче выражение потенциала к виду

$$U = \frac{fm}{2} \left(\frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2} \right).$$

14. Указание. Рассмотрите приближенное выражение потенциала тяготения тела (с точностью до второй сферической гармоники). Положите в этом выражении долготные члены равными нулю.

§ 3

1. Во всех внутренних точках потенциал тяготения имеет постоянное значение. Поэтому достаточно найти его значение для центра эллипсоида. Пусть a, b, c — полуоси одной граничной поверхности, а $a(1+\varepsilon), b(1+\varepsilon), c(1+\varepsilon)$ — полуоси другой. Тогда потенциал тяготения равен

$$V = f\sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi d\vartheta}{\frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta}{b^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}} = \\ = 2\pi f\sigma abc \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},$$

где σ — плотность.

2. Пусть V — потенциал эллипсоида во внутренней точке, σ — плотность, тогда потенциальная энергия равна

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V d\tau,$$

где $d\tau$ — элемент объема эллипсоида, а интегрирование распространено на его объем.

Подставляя сюда вместо V его значение согласно формуле (2.3.1), будем иметь

$$W = \frac{8}{15} \pi^2 f \sigma^2 a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}},$$

где $R(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}$.

3. Указание. Воспользуйтесь формулами (2.3.7) — (2.3.8)
4. Указание. Воспользуйтесь формулами (2.3.7) — (2.3.8).
5. Указание. Докажите справедливость утверждения с точностью до квадрата эксцентриситета эллипсоида.

Г Л А В А III

§ 1

1. 11,11 км/сек.
2. Плутон подходит к Солнцу ближе, чем Нептун, примерно на 0,2 а. е.
3. $r_a = 152 \cdot 10^6$ км, $r_n = 147 \cdot 10^6$ км.
4. Пусть AP (рис. P.3.1) — линия апсид орбиты спутника, CD — линия пересечения плоскости орбиты с плоскостью экватора (линия узлов). В течение одного оборота спутник проходит над северным полушарием дугу $СПД$, а над южным — дугу $ДАС$.

Пусть C' и D' — точки, соответственно симметричные точкам C и D относительно линии апсид:

$$\begin{aligned} \cup SPD &= \cup SPC' + \cup C'D, \\ \cup DAC &= \cup DAD' + \cup D'C. \end{aligned}$$

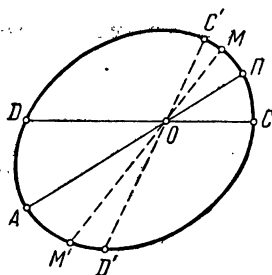


Рис. P.3.1.

Пусть M — произвольная точка дуги $СПС'$, M' — точка на дуге $ДАД'$, в которой эту дугу пересекает прямая $МО$. Обозначим истинные аномалии точек M и M' через v и v' . Но $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$, и поэтому $\cos v > 0$. Но $v' = v + \pi$, так что $\cos v' = -\cos v < 0$. Имеем

$$OM = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad OM' = \frac{p}{1 + e \cos v'} = \frac{p}{1 - e \cos v}.$$

Отсюда видно, что $OM' > OM$. Но из интеграла энергии (3.1.2) ясно, что чем дальше спутник от центра Земли, тем его скорость меньше. Поэтому в любой точке M дуги $СПС'$ спутник движется быстрее, чем в соответствующей ей точке M' дуги $ДАД'$. Следовательно, и всю дугу $СПС'$ спутник проходит быстрее, чем дугу $ДАД'$.

Что же касается дуг $C'D$ и $D'C$, то ввиду их симметрии относительно линии апсид AP спутник проходит их за одинаковые промежутки времени. Теперь ясно, что дугу $СПД$ спутник проходит быстрее, чем дугу $ДАС$. Спутник находился дольше над южным полушарием, чем над северным.

5. Обозначим через m массу ракеты, через K — гравитационный параметр планеты. Тогда $Km/R^2 = mg$, откуда $K = gR^2$. Пусть ракета получила у поверхности планеты настолько малую начальную скорость V_0 , что она не удалилась в бесконечность, а пришла в точку на высоте H над поверхностью планеты, имея там нулевую скорость. Согласно интегралу энергии

$$V_0^2 - \frac{2K}{R} = -\frac{2K}{R+H},$$

откуда

$$V_0^2 = \frac{2gRH}{R+H}.$$

При больших H ($H \gg R$)

$$V_0^2 = \frac{2gR}{1 + \frac{R}{H}} \approx 2gR,$$

при малых H ($H \ll R$)

$$V_0^2 = \frac{2gH}{1 + \frac{H}{R}} \approx 2gH.$$

6. $e = \sec \frac{\alpha}{2} = \sec 30^\circ \approx 1,13.$

7. Следует из (3.1.12) и (3.1.14).

8.

$$\sigma_2 \dot{z} - \sigma_3 \dot{y} + \frac{Kx}{r} = -\lambda_1,$$

$$\sigma_3 \dot{x} - \sigma_1 \dot{z} + \frac{Ky}{r} = -\lambda_2,$$

$$\sigma_1 \dot{y} - \sigma_2 \dot{x} + \frac{Kz}{r} = -\lambda_3;$$

здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — координаты вектора σ , а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — координаты вектора Лапласа λ .

9. а) Так как $\sigma^2 = Kr$, $\rho = a(1 - e^2)$, то $a = \sigma^2 / [K(1 - e^2)]$,

б) из пункта а) и (3.1.10) следует $a = -K/h$.

§ 2

1. $V_{кр} = 29,8$ км/сек, $V_{пар} = 42,1$ км/сек.

2. Пусть R — радиус Земли, K_3 — его гравитационный параметр. Вокруг своей оси Земля делает один полный оборот в абсолютной системе координат за одни звездные сутки, т. е. за 86 164 сек среднего солнечного времени. Поэтому

$$\frac{V}{R+H} = \frac{2\pi}{86\,164}.$$

Но $V = V_{кр} = \sqrt{K_3/(R+H)}$. Отсюда находим $H = 35\,800$ км.

3. $h = (2,31)^2 - \frac{1 \cdot 398\,600}{320\,000} > 0$. Поэтому орбита гиперболическая.

4. У к а з а н и е. Воспользуйтесь интегралом энергии.

5. $V^2 = V_{кр}^2 \left(2 - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v} \right)$.

6. $V_{кр} = V_1 \sqrt{\frac{R_3}{60R_3}} \approx 1,02$ км/сек, $V_{пар} = V_{кр} \sqrt{2} \approx 1,43$ км/сек.

7. Пусть R_3 — средний радиус Земли, m_3 — ее масса, V_{13} — значение первой космической скорости для этой планеты; R_L , m_L , V_{1L} — аналогичные величины для Луны. Тогда

$$V_{1L} = V_{13} \sqrt{\frac{m_L R_3}{m_3 R_L}} \approx 1,7 \text{ км/сек},$$

$$V_{11L} = V_{1L} \sqrt{2} \approx 2,4 \text{ км/сек}.$$

9. Нет.

10. 234 км/сек.

11. 1,68 км/сек.

12. Воспользуйтесь формулой $rV \sin \beta = \sigma$. В перигеуме и апогеуме $\beta = \pi/2$.

13. 0,18 км/сек.

14. С помощью формул (3.2.1), (3.2.2) получим

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \left(\frac{V_p}{V_r} \right)^2 = \frac{p^2}{r^2 e^2 \sin^2 v} = \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{r^2 e^2 - (re \cos v)^2}.$$

Из уравнения орбиты

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

найдем

$$re \cos v = p - r, \quad r^2 e^2 \sin^2 v = r^2 e^2 - (p - r)^2 = (1 - e^2) [a^2 e^2 - (a - r)^2].$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{a^2 (1 - e^2)}{a^2 e^2 - (a - r)^2}.$$

15. Пусть K — гравитационный параметр Солнца. В момент t_0

$$V_r = V_0 \cos \beta = \frac{Ke}{\sigma} \sin v_0, \quad \sigma = V_0 r_0 \sin \beta,$$

откуда

$$e \sin v_0 = \frac{r_0 V_0^2}{2K} \sin 2\beta.$$

Из уравнения орбиты космического корабля найдем

$$e \cos v_0 = \frac{p}{r_0} - 1 = \frac{r_0 V_0^2}{K} \sin^2 \beta - 1.$$

Из последних двух уравнений следует

$$\operatorname{tg} v_0 = \frac{1}{2} \frac{\frac{r_0 V_0^2}{K} \sin 2\beta}{\frac{r_0 V_0^2}{K} \sin^2 \beta - 1},$$

$$e^2 = \left(\frac{r_0 V_0^2}{K} - 1 \right)^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta.$$

Кроме того,

$$p = \frac{\sigma^2}{K} = \frac{r_0^2 V_0^2 \sin^2 \beta}{K}, \quad r_n = \frac{p}{1 + e}.$$

16. $\frac{p}{r} = 1 + e \cos(v_0 + \gamma) = (1 + e \cos v_0) \left(\cos \gamma - \frac{e \sin v_0}{1 + e \cos v_0} \sin \gamma \right) + (1 - \cos \gamma)$.
 Но в момент t_0

$$V_r = \sqrt{\frac{K}{\rho}} e \sin v_0, \quad V_\rho = \sqrt{\frac{K}{\rho}} (1 + e \cos v_0),$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{V_r}{V_\rho} = \frac{e \sin v_0}{1 + e \cos v_0}.$$

Кроме того,

$$\frac{p}{r_0} = 1 + e \cos v_0, \quad \text{где} \quad \rho = r_0^2 V_0^2 \sin^2 \beta / K.$$

Из написанных равенств следует

$$\frac{p}{r} = 1 - \cos \gamma + \frac{p}{r_0} (\cos \gamma - \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma)$$

или

$$\left(1 - \frac{r_0}{\rho}\right) \cos \gamma - \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma = \frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{\rho}.$$

Решив это тригонометрическое уравнение, найдем γ .

17. Из интеграла энергии (3.1.2) и интеграла площадей (3.1.3) следует

$$V = \frac{K \sin \beta}{r_0 V_0 \sin \beta_0} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r_0 V_0^2 \sin^2 \beta_0}{K \sin^2 \beta} \left(2 - \frac{r_0 V_0^2}{K} \right)} \right],$$

$$r = \frac{K}{\frac{2K}{r_0} - V_0^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1 - r_0^2 V_0^2 \left(\frac{2K}{r_0} - V_0^2 \right) \sin^2 \beta_0}{K^2 \sin^2 \beta}} \right].$$

18. Полагая в последней формуле, полученной при решении задачи 16, $r_0 = R_3$, $r = R_3$, найдем

$$\frac{R_3}{R_3} = \frac{K}{R_3 V_0^2 \sin^2 \beta} (1 - \cos \gamma) + \cos \gamma - \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma,$$

откуда

$$V_0^2 = \frac{2K(1 - \cos \gamma)}{R_3 [A(1 - \cos 2\beta) + B \sin 2\beta]},$$

где

$$A = \frac{R_3}{R_3} - \cos \gamma, \quad B = \sin \gamma.$$

Можно выбрать вспомогательный угол λ так, чтобы

$$\cos \lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \lambda = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (0 \leq \lambda < 2\pi).$$

Тогда

$$V_0^2 = \frac{2K(1 - \cos \gamma)}{R_3 [A - \sqrt{A^2 + B^2} \cos(2\beta + \lambda)]}.$$

Отсюда видно, что V_0 принимает свое минимальное значение

$$V_{0\min} = \sqrt{\frac{2K(1 - \cos \gamma)}{R_3(A + \sqrt{A^2 + B^2})}}$$

когда $2\beta + \lambda = (2k + 1)\pi$ (k — целое число).

19. $\beta = 77^\circ 36'$, $V_0 = 26,14$ км/сек.

20. Из интеграла энергии следует, что

$$V_{\Pi}^2 - V_a^2 = 2K \left(\frac{1}{r_{\Pi}} - \frac{1}{r_a} \right),$$

т. е.

$$V_{\Pi}^2 \left(1 - \frac{V_a^2}{V_{\Pi}^2} \right) = \frac{2K}{r_{\Pi}} \left(1 - \frac{r_{\Pi}}{r_a} \right).$$

Учитывая «правило рычага» $V_a r_a = V_{\Pi} r_{\Pi}$, получим

$$V_{\Pi}^2 \left(1 + \frac{r_{\Pi}}{r_a} \right) = \frac{2K}{r_{\Pi}},$$

откуда

$$r_a = \frac{r_{\Pi}}{\frac{2K}{r_{\Pi} V_{\Pi}^2} - 1}.$$

Аналогично найдем

$$V_a = \frac{2K}{r_{\Pi} V_{\Pi}} - V_{\Pi}.$$

21. $V_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{K}{a}} \approx 29,8$ км/сек. $V_{\Pi}^2 = \frac{K}{a} \cdot \frac{r_a}{r_{\Pi}} = \frac{K}{a} \frac{(1+e)}{(1-e)} \approx \frac{K}{a} (1+2e)$ при малых e . Поэтому $V_{\Pi} = V_{\text{ср}} (1+e) \approx 30,3$ км/сек, $V_a = V_{\text{ср}} (1-e) \approx 29,63$ км/сек.

22. Пусть A — центр Земли, B и C — апогей и перигей орбиты Луны, $a_{\text{Д}}$ и $e_{\text{Д}}$ — большая полуось и эксцентриситет этой орбиты. Тогда

$$AB = a_{\text{Д}} (1 + e_{\text{Д}}) \approx 405 \cdot 10^3 \text{ км}, \quad AC = a_{\text{Д}} (1 - e_{\text{Д}}) \approx 363 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Рассмотрим сначала полет к точке B . Пусть Π — перигей орбиты аппарата, $r_{\Pi} = A\Pi = 6600$ км. Большая полуось орбиты равна

$$a = \frac{1}{2}(AB + A\Pi) \approx 206 \cdot 10^3 \text{ км},$$

$$V_{\Pi}^2 = K_3 \left(\frac{2}{r_{\Pi}} - \frac{1}{a} \right),$$

откуда $V_{\Pi} \approx 10,92$ км/сек. Аналогично можно найти скорость, необходимую аппарату для попадания в Луну в перигее C ее орбиты. Тогда $V_{\Pi} = 10,989$ км/сек.

23. В данном случае $r = a$, и поэтому

$$V = \sqrt{\frac{K}{r}} = \sqrt{\frac{K}{a}} = V_{\text{кр}}.$$

24. Так как $r_a = R + H$, $2a = r_a + r_{\Pi}$, то

$$V_a^2 = K \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2K}{R+H} \frac{r_{\Pi}}{R+H+r_{\Pi}}.$$

Но по условию $r_{\text{п}} \geq R + h$. Поэтому

$$\sqrt{\frac{K}{R+H}} > V_a \geq \sqrt{\frac{2K(R+h)}{(R+H)(2R+H+h)}}.$$

25. Имеем $\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \frac{|a|}{d}$. Но $V_{\infty}^2 = h = \frac{K}{|a|}$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \frac{K}{V_{\infty}^2 d}.$$

26. Из интеграла энергии и интеграла площадей имеем

$$h = -\frac{K}{a} = V_a^2 - \frac{2K}{d} = V^2 - \frac{2K}{R}, \quad dV_a = RV \sin \beta.$$

Отсюда

$$V^2 = \frac{2Kd(d-R)}{R(d^2 - R^2 \sin^2 \beta)}, \quad a = \frac{1}{2} \frac{d^2 - R^2 \sin^2 \beta}{d - R \sin^2 \beta}.$$

Эксцентриситет можно затем найти из соотношения $d = a(1 + e)$.

$$27. V_0^2 = \frac{R_3 + h}{R_3 + H} \frac{2K_3(H-h)}{(R_3 + H)^2 \cos^2 \psi - (R_3 + h)^2}.$$

28. Пусть R — радиус Земли, K_3 — ее гравитационный параметр. Пусть АМС в момент ее отделения от несшей ее ракеты находилась на расстоянии $r_0 = R + H$ от центра Земли и имела скорость V_0 . Через $V_{\text{пар}}$ обозначим параболическую скорость в той же точке. Имеем

$$h = V_0^2 - \frac{2K_3}{r_0} = 14,8 \text{ км}^2/\text{сек}^2, \quad V^2 - V_{\text{пар}}^2 = h.$$

Но $V - V_{\text{пар}} = d$. Поэтому $V + V_{\text{пар}} = \frac{h}{d}$,

$$V = \frac{1}{2} \left(d + \frac{h}{d} \right) = 11,56 \text{ км/сек}, \quad V_{\text{пар}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{d} - d \right) \approx 10,9 \text{ км/сек}.$$

Из зависимости $V_{\text{пар}}^2 = \frac{2K_3}{R+H}$ находим, что $H = 380 \text{ км}$. Так как $h = -K_3/a$, то легко найти a . В частности, отсюда видно, что орбита гиперболическая.

29. Из интеграла энергии следует $V^2 = V_{\text{пар}}^2 - \frac{K}{a}$. Кроме того, $V_{\text{пар}}^2 = \frac{2K}{r_0}$.

Из этих равенств имеем

$$a = \frac{r_0}{2 \left(1 - \frac{V_0^2}{V_{\text{пар}}^2} \right)}.$$

30. $e = V_0^2/V_{\text{кр}}^2 - 1$.

31. Имеем $e \cos v = \frac{p-r}{r}$, $e \sin v = V_r \sqrt{\frac{p}{K}}$, откуда

$$e^2 = \left(\frac{p-r}{r} \right)^2 + \frac{p}{K} V_r^2 = \left(1 - \frac{V_r^2}{V_{\text{кр}}^2} \right)^2 + \left(\frac{V_r}{V_{\text{кр}}} \right)^2 \left(\frac{V_p}{V_{\text{кр}}} \right)^2.$$

$$32. e^2 = 1 - \left(2 - \frac{V_0^2}{V_{кр}^2}\right) \left(\frac{V_0}{V_{кр}} \cos \alpha\right)^2, \quad a = \frac{R}{2 - \frac{V_0^2}{V_{кр}^2}}, \quad H = a(1+e) - R.$$

$$33. \operatorname{ctg} \beta = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v}, \quad \text{где } e = \frac{V_0^2}{V_{кр}^2} - 1.$$

$$34. \text{Из соотношений } e^2 = 1 + \frac{h\sigma^2}{K^2}, \quad \sigma = r_0 V_0 \sin \beta, \quad h = V_0^2 - \frac{2K}{r_0} \text{ получим}$$

$$e^2 - 1 = \frac{hr_0^2 V_0^2 \sin^2 \beta}{K}.$$

При $\beta = \pi/2$ имеем

$$e_0^2 - 1 = \frac{hr_0^2 V_0^2}{K}.$$

Из этих соотношений следует

$$e^2 = (e_0^2 - 1) \sin^2 \beta + 1.$$

Отсюда и из зависимостей $r_{II} = a(1-e)$, $r_0 = a(1-e_0)$ находим

$$r_{II} = r_0 \frac{1-e}{1-e_0}.$$

35. Пусть e , a , p — эксцентриситет, большая полуось и фокальный параметр орбиты. Так как

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_p}{V_r} = \frac{1+e \cos v}{e \sin v}, \quad \text{то } e = \frac{1}{\sin v \operatorname{tg} \beta - \cos v}.$$

Отсюда и из соотношений

$$r = \frac{p}{1+e \cos v}, \quad p = \frac{\sigma^2}{K}, \quad \sigma = rV \sin \beta$$

можно найти

$$\operatorname{tg} v = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta}{\sin^2 \beta - (V_{кр}/V)^2}.$$

36. Подставляя в последнюю формулу решения задачи 35 $\beta = 60^\circ$, $V = 35,0$ км/сек, $V_{кр} = 30,0$ км/сек, найдем, что $v = 87^\circ 58'$.

37. Пусть v — истинная аномалия спутника в начальный момент. Тогда $v = \pi - \alpha$. Из уравнения орбиты имеем

$$a = R(1 - e \cos \alpha)/(1 - e^2).$$

Из интеграла энергии ясно, что ракета будет иметь минимальную начальную скорость в том случае, когда большая полуось a окажется минимальной.

А для этого необходимо, чтобы $\frac{\partial a}{\partial e} = 0$, т. е.

$$R \frac{(1-e^2) \cos \alpha + 2e(1-e \cos \alpha)}{(1-e^2)^2} = 0, \quad e^2 \cos \alpha - 2e + \cos \alpha = 0, \quad e = \frac{1 \pm \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Так как $0 < \alpha < \pi$, $e < 1$, то в последней формуле следует взять знак +:

$$e = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

38. Пусть P — точка старта, Q — точка падения ракеты, 2α — радианная мера дуги PQ , R — радиус Земли, v — истинная аномалия точки P . Тогда имеем

$$R = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad v = \pi - \alpha,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{1}{e} \left(\frac{a}{R} - 1 \right) - \frac{ae}{R}.$$

Величину a/R можно было бы вычислить с помощью интеграла энергии

$$V_0^2 = K \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

откуда

$$\frac{R}{a} = 2 - \frac{RV_0^2}{K}.$$

В случае максимальной дальности полета угол α должен принимать максимальное значение, а функция $\cos \alpha$ должна иметь минимум. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial e} (\cos \alpha) = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{e^2} \left(\frac{a}{R} - 1 \right) - \frac{a}{R} = 0,$$

откуда

$$e^2 = 1 - \frac{RV_0^2}{K}.$$

39. Пусть R — радиус планеты, K — ее гравитационный параметр, a — большая полуось, e — эксцентриситет орбиты. Имеем

$$V_1^2 = K \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right), \quad V_1^2 = \frac{K}{R},$$

откуда следует, что $a = R$.

Легко видеть, что линия апсид делит пополам $\angle POQ$, где P — полюс, Q — точка на экваторе, O — центр Земли. Отсюда вытекает, что истинная аномалия v_0 точки P равна 135° . Воспользуемся формулой (см. задачу 35)

$$\operatorname{tg} v_0 = \frac{L \sin \alpha \cos \alpha}{L \cos^2 \alpha - 1}, \quad \text{где} \quad L = \frac{RV_0^2}{K}.$$

В нашем случае $L = 1$, $\operatorname{tg} v_0 = -1$, и мы получаем

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha,$$

откуда либо $\sin \alpha = 0$, либо $\sin \alpha = \cos \alpha$, т. е. $\operatorname{tg} \alpha = 1$. В первом случае получаем тривиальное решение $\alpha = 0$, во втором $\alpha = 45^\circ$.

§ 3

1. Отметим апоцентр A , середину O отрезка AP и конец B малой оси. Строим точку C на отрезке OP , так что $OP = BC$.

2. Пусть O — точка пересечения асимптот, D и B — на асимптоте, $BP \perp OP$, $OD = OP$. Строим на луче OP точку C так, чтобы $\triangle ODC$ был равен $\triangle OPB$.

3. Строим $\triangle ПСК$ так, чтобы точка K лежала на параболе, C — на линии апсид, $\operatorname{tg} \angle СПК = 2$, $\angle ПСК = 90^\circ$. Точка C — искомая.

4. Из интеграла энергии имеем

$$2a = \frac{r}{1 - (V_0/V_{\text{пар}})^2}$$

(здесь r — расстояние от притягивающего центра C до спутника P). По этим данным можно построить (даже лишь с помощью циркуля и линейки, без вычислений) отрезок $2a$. Затем строим окружность Γ с центром C радиуса $2a$ («окружность нулевой скорости») и окружность γ с центром P , касающуюся окружности Γ внутренним образом (рис. Р.3.2). Пусть T — точка касания окружностей. Строим (на γ) точку F , симметричную точке T относительно прямой, проходящей через P и коллинеарной вектору V_0 . Точка F — искомый «пустой» фокус орбиты. Пусть O — середина отрезка FC . Откладывая на луче OC от точки O отрезок, равный a , получим искомый перигецентр Π .

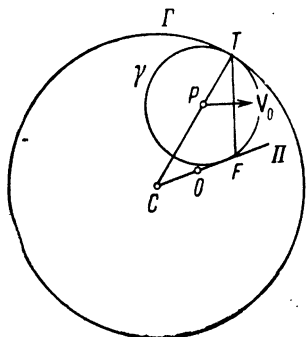


Рис. Р.3.2.

5. Находим a_r из уравнения $V_0^2 = V_{\text{пар}}^2 \left(2 + \frac{r}{a_r}\right)$ (здесь r — расстояние от спутника P до притягивающего центра C). Строим окружность γ с центром P радиуса $CP + 2a_r$ и луч l , симметричный лучу PC относительно прямой, проходящей через точку P и коллинеарной вектору V_0 . Точка F пересечения луча l с окружностью γ будет искомым фокусом. Так как $CP + PF = CF$, $PF - CP = 2a_r$, то $CP = \frac{1}{2}CF - a_r$. По этому условию легко строится перигецентр Π .

6. С помощью интеграла энергии находим a (как в задаче 4). Строим затем последовательно «окружность нулевой скорости» Γ и две окружности γ_k ($k=1,2$) с центрами в точках P_k и касающиеся окружности Γ . Каждая общая точка окружностей γ_1 и γ_2 может быть выбрана в качестве «пустого» фокуса F эллиптической орбиты, соединяющей точки P_1 и P_2 (в частности, если γ_1 и γ_2 не имеют общих точек, то перелет невозможен). Направление вектора скорости V_1 определяется биссектрисой угла CP_1F .

7. Находим a_r (см. задачу 5) и ищем «пустой» фокус как общую точку двух окружностей γ_k ($k=1,2$), каждая из которых имеет своим центром точку P_k , а радиусом — отрезок $CP_k + 2a_r$.

8. Как мы видели при решении задачи 6, перелет из точки P_1 в точку P_2 возможен лишь тогда, когда окружность γ_2 касается окружности γ_1 или пересекает ее, иными словами, если $P_1P_2 \leq \rho_1 + \rho_2$, где ρ_k ($k=1,2$) — радиус окружности γ_k .

Выясним сначала, где расположены все такие точки P_2 , для которых имеет место равенство

$$P_1P_2 = \rho_1 + \rho_2$$

или, что то же,

$$P_1P_2 + P_2C = \rho_1 + \rho_2 + P_2C.$$

Но $\rho_2 + P_2C = 2a$, а ρ_1 не зависит от положения точки P_2 , так что $2a + \rho_1 = \text{const}$. Итак, речь идет о множестве всех точек P_2 , для которых имеет место равенство

$$P_2C + P_1P_2 = 2a + \rho_1 = \text{const}.$$

Это — эллипс L с фокусами P_1 и C . Неравенство $P_1P_2 < \rho_1 + \rho_2$ имеет место, очевидно, внутри этого эллипса. Итак, «граница досягаемости» — эллипс L . При $V_0 \geq V_{\text{пар}}$ каждая точка плоскости досягаема при соответствующем выборе направления скорости V_0 .

9. Находим $2a$ (см. задачу 4), полагая $r = 1$ а.е., $V_0 = 35$ км/сек, $V_{\text{пар}} = 42$ км/сек. Получаем $2a = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = 1,44$ а.е. Кроме того, $\rho_1 = 1$ а.е. По-

этому большая ось эллипса безопасности равна 2,44 а.е. Следовательно, эллипс безопасности целиком расположен внутри орбиты Юпитера, и достижение этой орбиты при указанной начальной скорости невозможно.

10. Если V_0 — искомая минимальная скорость, то точка P_2 должна оказаться на «границе досягаемости», т. е. на эллипсе с фокусами C и P_1 и большой осью $\rho_1 + 2a = CP_2 + P_2P_1$. Но $2a + \rho_1 = 4a - CP_1$. Поэтому легко найти значение a . Искомая скорость V_0 (по абсолютной величине) определяется тогда из интеграла энергии

$$V_0^2 = V_{\text{пар}}^2 \left(1 - \frac{r_1}{2a} \right)$$

(здесь $V_{\text{пар}}$ — параболическая скорость в точке P_1). Направление вектора скорости V_0 можно найти так же, как в задаче 6.

11. Линия апсид проходит через центр Земли C и середину дуги PQ . Пусть F — «пустой» фокус. Тогда $2a = CP + FP = R + FP$. Из интеграла энергии ясно, что требование минимальности начальной скорости V_0 равносильно требованию минимальности большой оси $2a$, а это, как видно из последней формулы, приводит к тому, что FP должно быть минимальным, т. е. $FP \perp CF$. Но в таком случае

$$2c = CF = R \cos \alpha, \quad 2a = R(1 + \sin \alpha), \quad a = \frac{R}{2}(1 + \sin \alpha).$$

Так как $e = c/a$, то

$$e = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}, \quad V_0^2 = K \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right) = V_{\text{пар}}^2 \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Найдем угол φ , воспользовавшись биссектральным свойством вектора скорости (см. «справочные сведения»), в силу которого вектор V_0 должен делить пополам угол, дополнительный $\angle CPF$. Но $\angle CPF = 90^\circ - \alpha$ и дополнительный к нему угол равен $90^\circ + \alpha$. Последний угол равен также $2(\varphi + \alpha)$. Поэтому $90^\circ + \alpha = 2(\varphi + \alpha)$, $\varphi = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Найдем H :

$$H = r_a - R = a + c - R = \frac{1}{2} R (\sin \alpha + \cos \alpha - 1) = \frac{1}{2} R [\sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ) - 1].$$

Отсюда, между прочим, видно, что ракета, получив минимальную скорость, достигает наибольшей высоты, когда $\alpha = 45^\circ$, т. е. когда геоцентрическое угловое расстояние между точками P и Q равно 90° .

12. $V_0 = 1,598$ км/сек, $\varphi = 16^\circ 5'$.

Указание. Из прямоугольного сферического треугольника P_1NP_2 (N — северный полюс Луны) можно найти градусную меру 2α дуги P_1P_2 . Затем задача решается аналогично задаче 11.

13. Зная V_0 , можем найти большую полуось a орбиты. Проведем окружность Γ нулевой скорости и окружность γ с центром P , касающуюся (изнутри) окружности Γ . Каждому выбору угла φ соответствует свое положение «пустого фокуса» F на γ . При этом $\angle PCF$ (обозначим его через α) выражается через

истинную аномалию v точки P по формуле $\alpha = \pi - v$, а селеноцентрическое угловое расстояние между точками P и Q равно 2α . Следовательно, угловое расстояние PQ будет максимальным, если максимальным будет $\angle PCF$, а это имеет место, если CF — касательная к окружности γ .

В этом случае

$$2\alpha = R(\cos \alpha + \sin \alpha) = R\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right); \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{R}.$$

Отсюда находим α , а затем и искомое расстояние d :

$$d = 2R\alpha.$$

Рассуждая, как в решении задачи 11, устанавливаем (с помощью биссектрального свойства вектора скорости), что

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

§ 4

1. Пусть R — радиус Земли, H_a ($H_{\text{п}}$) — высота апогея (перигея) над ее поверхностью. Так как $a^3/T^2 = K_3/4\pi^2 = 10 \cdot 100 \text{ км}^3/\text{сек}^2$, $T = 6360 \text{ сек}$, то $a = 7420 \text{ км}$, $H_{\text{п}} = 2(a - R) - H_a = 220 \text{ км}$.

2. $88^{\text{м}}, 62$.

3. Пусть C — центр Земли, B — перигей орбиты Луны, Π — перигей орбиты корабля, $CP = 6600 \text{ км}$, $AB = 363 \cdot 300 \text{ км}$, $a = 185 \cdot 000 \text{ км}$, $a^3/T^2 = 10 \cdot 100 \text{ км}^3/\text{сек}^2$, откуда $T = 220^{\text{ч}}$. Поэтому перелет к перигею Луны займет $T/2 \approx 110^{\text{ч}} = 4^{\text{д}} 14^{\text{ч}}$. Аналогично найдем, что время полета к апогею Луны составит около $5^{\text{д}} 10^{\text{ч}}$.

4. $a = \sqrt[3]{KT^2/(4\pi^2)} = 40 \cdot 700 \text{ км}$, $H_a = 2a - 2R - H_{\text{п}} \approx 68 \cdot 000 \text{ км}$.

5. Пусть $M_{\text{з}}$ и $M_{\text{л}}$ — массы Земли и Луны, $T_{\text{л}}$ и $T_{\text{р}}$ — периоды обращения Луны и ракеты вокруг Земли. Тогда

$$\frac{T_{\text{л}}^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f(M_{\text{з}} + M_{\text{л}})}, \quad \frac{T_{\text{р}}^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{fM_{\text{з}}}, \quad \frac{T_{\text{л}}}{T_{\text{р}}} = \left(1 + \frac{M_{\text{л}}}{M_{\text{з}}}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{M_{\text{л}}}{M_{\text{з}}}.$$

Пусть L — длина лунной орбиты. Тогда Луна проходит за каждую секунду на $\frac{L}{T_{\text{л}}} - \frac{L}{T_{\text{р}}}$ км больше, чем ракета. Чтобы догнать ракету, Луне потребуется время:

$$\frac{L}{2} : \left(\frac{L}{T_{\text{л}}} - \frac{L}{T_{\text{р}}}\right) = \frac{T_{\text{л}}}{2} : \left(1 - \frac{T_{\text{л}}}{T_{\text{р}}}\right) \approx \frac{M_{\text{з}}}{M_{\text{л}}} T_{\text{л}} \approx 81 \text{ сидерич. месяц}.$$

Итак, примерно через 6,5 лет Луна догнала бы ракету. Притяжение Луны, которым мы пренебрегли, только ускорит этот процесс.

6. $T = 450^{\text{д}}$.

7. $a = 134 \cdot 10^6 \text{ км}$, $r_a = 2a - r_{\text{п}} = 148 \cdot 10^6 \text{ км}$.

8. $a = R_{\text{з}} + \frac{1}{2}(H_a + H_{\text{п}}) = 7260 \text{ км}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{K}} \approx 102^{\text{м}}, 6$.

9. Орбита корабля — эллипс с большой полуосью $a = (R_{\text{з}} + R_{\text{м}})/2 \approx 189 \cdot 10^6 \text{ км}$. Пусть t — время перелета. Из зависимостей $a^3/(2t)^2 = R_{\text{з}}^3/T_{\text{з}}^2$, $T_{\text{з}} \approx 365^{\text{д}}$, $R_{\text{з}} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ км}$ найдем $t \approx 260^{\text{д}}$.

10. $t \approx 150^{\text{д}}$, $V \approx 27 \text{ км/сек}$.

11. $a = 27\,411,8$ км, $r_a = 6622,6$ км, $r_a = 48\,201,0$ км,

$$V_{\text{п}} = \sqrt{\frac{K(1+e)}{a(1-e)}} = 10,28 \text{ км/сек},$$

$$V_a = \sqrt{\frac{K(1-e)}{a(1+e)}} = 1,42 \text{ км/сек}.$$

12. Имеем $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{fM}$, $V_0^2 = \frac{fM}{a}$, где a и T — соответственно большая полуось орбиты двойной звезды Спика и период ее обращения, M — ее масса, а V_0 — линейная скорость. Отсюда

$$a = \frac{TV_0}{2\pi}, \quad fM = \frac{TV_0^3}{2\pi}.$$

Пусть M_c и M_3 — массы Солнца и Земли, a_3 — среднее расстояние между ними, T_3 — период обращения Земли вокруг Солнца. Тогда

$$f(M_c + M_3) = \frac{a_3^3}{T_3^2} 4\pi^2.$$

Из последних двух равенств следует

$$\frac{M}{M_c} = \left(1 + \frac{M_3}{M_c}\right) \frac{T^2 T_3^3 V_0^3}{8\pi^3 a^3}.$$

Подставив числовые данные, найдем $a = 3,27 \cdot 10^6$ км, $M/M_c = 0,063$.

13. $a \approx 42\,000$ км.

14. $a = 2,530$ а. е.

15. 204^d , $0,187$ а. е.

16. $\frac{m}{M} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \left(\frac{a_c}{a}\right)^3$, где a , T — соответственно большая полуось и период

обращения планеты, a_c , T_c — соответственно большая полуось и период обращения спутника, M и m — массы Солнца и планеты.

17. $0,214$.

18. $3^h 20^m$.

19. Пусть $\Delta V = V_{\text{кр}} - V_a$, T — период обращения спутника, e — эксцентриситет его орбиты, $T_{\text{кр}}$ — период обращения кругового спутника (в нашем случае $T_{\text{кр}}$ равно звездным суткам), $T_{\text{вр}}$ — период вращения Земли вокруг своей оси ($T_{\text{вр}}$ равно звездным суткам). Имеем

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_{\text{ср}} = \frac{360^\circ}{T} - \frac{360^\circ}{T_{\text{вр}}}.$$

Нетрудно проверить, что

$$T = (1+e)^{\frac{3}{2}} T_{\text{кр}}, \quad e = 1 - \left(\frac{V_a}{V_{\text{кр}}}\right)^2 = 2 \frac{\Delta V}{V_{\text{кр}}} - \left(\frac{\Delta V}{V_{\text{кр}}}\right)^2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_{\text{ср}} = 360 \left[(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \text{ град/зв. сутки}$$

Но

$$(1+e)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e + \frac{1 \cdot 3}{2^2}e^2 + \dots$$

Получаем

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_{\text{ср}} \approx 3 \frac{\Delta V}{V_{\text{кр}}} \text{град/зв. сутки}$$

Подставив числовое значение для $V_{\text{кр}}$ и переходя к средним солнечным суткам, получим

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_{\text{ср}} \approx 0,1074 \text{ град/ср. солн. сутки}$$

20. Пусть S , E , L — центры Солнца, Земли, Луны. Примем в качестве начального момента ($t=0$) тот момент, когда L находится на продолжении отрезка SE . Рассмотрим две системы координат: Sxy и $E\xi\eta$; оси x и ξ направим соответственно вдоль SE и EL ; ось y образуется из оси x поворотом на 90° в направлении движения Земли вокруг Солнца; ось η получается аналогично из оси ξ . Пусть n_1 — среднее движение Луны, a_1 — радиус ее орбиты, n_2 и a_2 — соответствующие величины для гелиоцентрической орбиты Земли. В произвольный момент времени t Земля имеет в системе отсчета Sxy координаты

$$X = a_2 \cos n_2 t, \quad Y = a_2 \sin n_2 t.$$

Луна имеет в системе $E\xi\eta$ такие координаты:

$$\xi = a_1 \cos n_1 t, \quad \eta = a_1 \sin n_1 t.$$

Найдем координаты (x, y) Луны L в момент t в системе отсчета Sxy . Так как, очевидно, $x = X + \xi$, $y = Y + \eta$, то

$$x = a_1 \cos n_1 t + a_2 \cos n_2 t, \quad y = a_1 \sin n_1 t + a_2 \sin n_2 t.$$

Эти уравнения задают в параметрической форме гелиоцентрическую орбиту Луны L .

Кривизна k орбиты в каждый момент времени t вычисляется по следующей формуле:

$$K = (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

В задаче требуется доказать, что $k > 0$, т. е.

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y > 0.$$

Вычислив производные, получим после несложных выкладок

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y = a_1 a_2 n_1 n_2 (n_1 + n_2) [\cos(n_2 - n_1)t + D],$$

где

$$D = \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{1}{1 + \frac{n_1}{n_2}} + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1}}.$$

Пусть T_1 — период обращения Луны. Согласно «уточненному третьему закону Кеплера» имеем

$$n_1^2 a_1^3 = f(m_3 + m_{\text{Л}}).$$

Аналогично $n_2^2 a_2^3 = I (m_3 + m_c)$. Поэтому

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3 \frac{1 + \frac{m_1}{m_3}}{1 + \frac{m_3}{m_c}} \cdot \frac{m_3}{m_c} = 147,25; \quad D = 2,5373.$$

Но тогда в любой момент $\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x} > 0$, что требовалось доказать.

21. Указание. Как и в предыдущей задаче, исследовать радиус кривизны геоцентрической траектории планеты и воспользоваться третьим законом Кеплера.

Г Л А В А IV

§ 1

1. Используя формулу (4.1.14), найдем $t - \tau = 51^h$.

2. Полагая в формуле (4.1.14) $p = 2r_{\Pi} = 2$ а. е., $r = 30$ а. е., $K = k^2$ (а. е.)³/сут.², $k = 0,01720$, получим $t - \tau \approx 13$ лет.

3. 60° ; 120° .

4. $186^d, 5$.

5. Находим τ из формул (4.1.4), (4.1.5). Для этого сначала вычислим a , e , n , $\cos E$, $\sin E$, E . По условию $V_{\Pi} = 10,95$ км/сек, $r_{\Pi} = 6600$ км, $K = 398\,600$ км³/сек², $r = 384\,400$ км. Из интеграла энергии имеем

$$a = \frac{r_{\Pi}}{2 - \frac{r_{\Pi} V_{\Pi}^2}{K}}$$

$e = 1 - \frac{r_{\Pi}}{a} = 0,9853$, $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 2,1 \cdot 10^{-8}$ сек⁻¹. Из формулы (4.1.3) получим

$$\cos E = \frac{a - r}{ae}.$$

По таблицам найдем $E = 1,425$, $\sin E = 0,9894$. Поэтому (см. (4.1.4), (4.1.5))

$$t - \tau = \frac{1}{n} (E - e \sin E) \approx 60^h.$$

6. По условию $r_{\Pi} = 6600$ км, $V_{\Pi} = 12,0$ км/сек, $K = 398\,600$ км³/сек², $r = 384\,400$ км. Из интеграла энергии имеем

$$a = \frac{r_{\Pi}}{2 - \frac{r_{\Pi} V_{\Pi}^2}{K}} = -17\,170 \text{ км.}$$

Орбита — гиперболическая (ибо $a < 0$). Пользуясь формулами (4.1.9) — (4.1.11) и производя вычисления в том же порядке, что и при решении предыдущей задачи, получим $t - \tau = 20^h$.

7. $v = 3\pi/2$, $\sin v = -1$, $a = 6630$ км, $\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{a^3}{K}} = 855^s, 3$, $e = \frac{H_a - H_{\Pi}}{2a} = 0,025$. По приближенной формуле (4.1.16) имеем

$$t - \tau = 855,3 \left(\frac{3\pi}{2} + 2 \cdot 0,025 \right) \approx 68^m, \quad t = 10^h 08^m.$$

8. В данном случае $r \approx a(1 - e \cos M)$ и поэтому

$$H = \frac{1}{2} (H_a + H_n) - \frac{1}{2} (H_a - H_n) \cos M.$$

9. По формуле, полученной при решении предыдущей задачи, можно найти M , а затем и τ .

10. Находим a из зависимости $T^2/a^3 = 4\pi^2/K$, затем $H_a + H_n$ из формулы $R + 0,5(H_a + H_n) = a$. Кроме того, $M = 2\pi(t - \tau)/T$. Пользуясь формулой, полученной в решении задачи 6, вычислим $H_a - H_n$. Тогда $e = (H_a - H_n)/2a$.

$$11. t - \tau = 1^{\text{h}} 15^{\text{m}}, \quad a = R_3 + \frac{1}{2} (H_a + H_n) = 6625 \text{ км},$$

$$e = (H_a - H_n)/2a = 0,0110, \quad n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 1,143 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1},$$

$$M = n(t - \tau) = 5,144.$$

По таблицам находим $\sin M = 0,9083$, $\cos M = 0,4183$. Вычисляем v и H :

$$v = M + 2e \sin M, \quad \text{т. е.} \quad v = 293^{\circ} 35',$$

$$H = \frac{1}{2} (H_a + H_n) - \frac{1}{2} (H_a - H_n) \cos M \approx 224 \text{ км}.$$

$$12. v = 95^{\circ} 22' 48''.$$

13. Пусть точка S_1 на орбите имеет истинную аномалию $v_1 = 120^{\circ}$; пусть E_1 — эксцентрическая аномалия точки S_1 , t — время, необходимое спутнику для полета от перигея до точки S_1 , T — период обращения спутника. Тогда иско-мое в задаче время равно

$$t = 12^{\text{h}} + \frac{1}{n} (E_1 - e \sin E_1).$$

14. Заменяя орбиту параболой, имеем

$$\rho = 2r_n = 2a(1 - e) = 1,1155 \text{ а. е.}$$

Принимая за единицу расстояния 1 а. е., а за единицу времени 1 год, получаем $K = 4\pi^2$. Длительность перелета согласно (4.1.15) равна

$$t = \frac{2}{3} (r + \rho) \sqrt{\frac{2r - \rho}{K}} = 0,1113 \text{ лет} \approx 41^{\text{д}}.$$

15. а) Доказательство вытекает из формул

$$M - M_0 = (E - e \sin E) - (E_0 - e \sin E_0),$$

$$\sin E = \sin [(E - E_0) + E_0] = \sin (E - E_0) \cos E_0 + \cos (E - E_0) \sin E_0.$$

б) Положим $M = n(t - \tau)$, где $n = \sigma/|ab|$. Формула, приведенная в условии задачи, пригодна и в случае гиперболической орбиты, если в ней заменить E , E_0 , M , n соответственно на iH , iH_0 , $-iM$, $-in$. Если учесть, что $\sin iz = i \operatorname{sh} z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$, то получим

$$M - M_0 = - (H - H_0) + 2S_r \operatorname{sh}^2 \frac{H - H_0}{2} + C_r \operatorname{sh} (H - H_0),$$

где

$$S_r = e \operatorname{sh} H_0, \quad C_r = e \operatorname{ch} H_0.$$

16. Из формул (4.1.3)–(4.1.5) находим

$$t = \frac{1}{n} (E - e \sin E), \quad \cos E = \frac{a-r}{ae}, \quad n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}.$$

Так как по условию $0 < E < \pi$, то $\sin E = \sqrt{1 - \cos^2 E}$, $E = \arccos \frac{a-r}{ae}$.
Поэтому

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{K}} \left(\arccos \frac{a-r}{ae} - e \sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{ae}\right)^2} \right).$$

17. Рассмотрим сначала случай эллиптического движения. Из (4.1.3) и интеграла энергии получим

$$V^2 = \frac{K}{a} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E},$$

$$V_p = \frac{\sigma}{r} = \sqrt{\frac{K(1-e^2)}{a}} \frac{1}{1 - e \cos E},$$

$$V_r^2 = \frac{K}{\rho} e^2 \sin^2 v = \frac{K}{\rho} e^2 (1 - \cos^2 v).$$

Найдем $\cos v$ из равенства

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v} = a(1-e \cos E),$$

откуда

$$V_r = \frac{nae}{1 - e \cos E}.$$

Для гиперболического движения можно задачу решать аналогично. Можно искомые формулы получить и непосредственно из формул для эллиптического движения, заменяя в окончательных результатах E , $\sin E$, $\cos E$, a , n соответственно на iH , $i \operatorname{sh} H$, $\operatorname{ch} H$, $-a_r$, n_r .

18. При $e < 1$ $t = \sqrt{\frac{a^3}{K}} \left[2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin v}{1+e \cos v} \right].$

При $e > 1$ $t = \sqrt{\frac{|a|^3}{K}} \left[\frac{e \sqrt{e^2-1} \sin v}{1+e \cos v} - \ln \frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{v}{2}} \right].$

Указание. Сначала заметим, что интеграл $I_1 = \int \frac{dx}{1+e \cos x}$ можно вычислить с помощью рационализирующей подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Таким образом, нетрудно убедиться, что

$$\int_0^x \frac{dx}{1+e \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \quad \text{при } e < 1,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+e \cos x} = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \quad \text{при } e > 1.$$

С помощью той же подстановки можно вычислить и $I_2 = \int \frac{dx}{(1+e \cos x)^2}$. Укажем более короткий путь вычисления того же интеграла:

$$I_2 = \int \frac{1+e \cos x - e \cos x}{(1+e \cos x)^2} dx = I_1 - e \int \frac{d(\sin x)}{(1+e \cos x)^2}.$$

Выясним, насколько отличается $\frac{d(\sin x)}{(1+e \cos x)^2}$ от $d\left(\frac{\sin x}{1+e \cos x}\right)$:

$$d\left(\frac{\sin x}{1+e \cos x}\right) = \frac{e dx}{(1+e \cos x)^2} + \frac{d(\sin x)}{(1+e \cos x)^2}.$$

Поэтому $I_2 = I_1 - e\left(\frac{\sin x}{1+e \cos x} - eI_2\right)$, откуда

$$I_2 = \frac{1}{1-e^2} \left(I_1 - \frac{e \sin x}{1+e \cos x} \right).$$

19. В ходе решения воспользуемся задачами 3.3.11 и 3.3.12. Находим период T обращения ракеты:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{a}{R_L}\right)^{3/2} = \left(\frac{1+\sin \alpha}{2}\right)^{3/2}$$

(здесь 2α — угловое селеноцентрическое расстояние между точками C и D). Затем вычисляем эксцентрическую аномалию E_0 точки C .

Так как $R_L = a(1 - e \cos E_0)$, то

$$\cos E_0 = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{R_L}{a} \right) = \frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha}.$$

Если бы перелет от перигея до точки C был физически возможен, то он занял бы время

$$t_1 = \frac{1}{n} (E_0 - e_0 \sin E_0).$$

Поэтому перелет от точки C до апогея орбиты (т. е. до точки A орбиты, наивысшей над поверхностью Луны) должен занять время $T/2 - t_1$, а весь полет по дуге CAD займет время $T - 2t_1 = 47^m 26^s$.

20. Положим $R_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} r \left(\frac{2\pi k}{m} \right)$. При $m \rightarrow \infty$ R_m имеет своим пред-

делом число

$$L_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r dv.$$

Перейдем к новой переменной интегрирования E (E — эксцентрическая аномалия). Так как

$$r^2 dv = \sigma dt, \quad r = a(1 - e \cos E),$$

$$E - e \sin E = n(t - \tau), \quad (1 - e \cos E) dE = ndt,$$

то

$$r dv = \frac{\sigma}{r} dt = \frac{\sigma}{nr} (1 - e \cos E) dE = \frac{\sigma}{na} dE.$$

Поэтому

$$L_v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma}{na} dE = \frac{\sigma}{na}.$$

Но $\sigma = \sqrt{K\rho}$, $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}}$, $\rho = \frac{b^2}{a}$. Поэтому $L_v = b$.

21. Положим $d_m = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{T}{m} r\left(\frac{kT}{m}\right)$. При $m \rightarrow \infty$ d_m стремится к пределу

$$L_T = \frac{1}{T} \int_0^T r dt.$$

В силу уравнения Кеплера $(1 - e \cos E) dE = ndt$; кроме того, $r = a(1 - e \cos E)$. Поэтому

$$L_T = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{a}{n} (1 - e \cos E)^2 dE = a \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right).$$

22. Пусть L — длина всей орбиты. Тогда

$$\rho_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} r\left(\frac{kL}{m}\right),$$

При $m \rightarrow \infty$ ρ_m стремится к пределу

$$L_D = \frac{1}{L} \int_0^L r(l) dl, \quad L_D = \frac{1}{L} \int_0^L a(1 - e \cos E) dl = a - \frac{ae}{L} \int_0^L \cos E dl.$$

Но

$$\begin{aligned} x &= a \cos E, & y &= b \sin E, \\ dx &= -a \sin E dE, & dy &= b \cos E dE, & dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_0^L \cos E dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 E + b^2 \cos^2 E} \cos E dE = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}.$$

Во втором из этих интегралов произведем замену: $E = E_1 + \pi$. Тогда

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 E + b^2 \cos^2 E} \cos E dE = - \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 E_1 + b^2 \cos^2 E_1} \cos E_1 dE_1.$$

Поэтому

$$\int_0^L \cos E dl = 0 \quad \text{и} \quad L_D = a.$$

23. Ищется величина

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V^2 dt.$$

Из решения задачи 19 видно, что

$$V^2 = \frac{K}{a} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}.$$

Из уравнения Кеплера следует $(1 - e \cos E) dE = n dt$. Поэтому

$$T_{\text{ср}} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K}{2na} (1 + e \cos E) dE = \frac{n^2 a^2}{2}.$$

24. $\mu_t = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{\eta}$. Но из равенства $E - e \sin E = n(t - \tau)$ следует, что

$$n dt = (1 - e \cos E) dE = \frac{r}{a} dE,$$

т. е. $\frac{1}{r} dt = \frac{1}{na} dE$. Поэтому

$$\mu_t = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{na} = \frac{2\pi}{naT}, \quad \text{т. е. } \mu_t = \frac{1}{a}.$$

$$\mu_v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dv}{r} = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v) dv,$$

откуда

$$\mu_v = \frac{1}{\rho}.$$

§ 2

1. Из равенств $\bar{E} = M + e \sin \bar{E}$, $E_{n+1} = M + e \sin E_n$ и из неравенства $|\sin \alpha| < |\alpha|$, верного для любого действительного числа α , следует, что

$$\begin{aligned} |\bar{E} - E_n| &\leq |\bar{E} - E_{n+1}| + |E_{n+1} - E_n| = e |\sin \bar{E} - \sin E_n| + |E_{n+1} - E_n| = \\ &= 2e \left| \sin \frac{\bar{E} - E_n}{2} \right| \left| \cos \frac{\bar{E} + E_n}{2} \right| + |E_{n+1} - E_n| \leq e |\bar{E} - E_n| + |E_{n+1} - E_n|. \end{aligned}$$

Отсюда $(1 - e) |\bar{E} - E_n| \leq |E_{n+1} - E_n|$.

2. Положим для краткости $y = \text{Arsh } x = f(H)$, где $x = (H + M)/e$. Сначала вычислим и оценим $\frac{dy}{dH}$:

$$\frac{dy}{dH} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dH} = \frac{1}{e} \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1}.$$

Но $x = \text{sh } y$, и поэтому $\frac{dx}{dy} = \text{ch } y \geq 1$ для всех y . Поэтому для всех H

$$0 \leq \frac{dy}{dH} \leq \frac{1}{e} < 1.$$

Пользуясь равенствами $\bar{H} = f(\bar{H})$, $H_{n+1} = f(H_n)$, получим

$$|\bar{H} - H_n| \leq |\bar{H} - H_{n+1}| + |H_{n+1} - H_n|.$$

По теореме Лагранжа о среднем значении найдется такое число ξ между \bar{H} и H_n , что

$$|f(\bar{H}) - f(H_n)| = |f'(\xi)| |\bar{H} - H_n| \leq \frac{1}{e} |\bar{H} - H_n|.$$

Поэтому имеем

$$|\bar{H} - H_n| \leq \frac{1}{e} |\bar{H} - H_n| + |H_{n+1} - H_n|,$$

$$|\bar{H} - H_n| \leq \frac{e}{e-1} |H_{n+1} - H_n|.$$

Заметим, что приведенные здесь рассуждения применимы и в более общем случае:

Если $f(x)$ — произвольная дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция,

$$|f'(x)| \leq q < 1,$$

\bar{x} — какой-либо лежащий в промежутке (a, b) корень уравнения

$$x = f(x),$$

x_n — какое-либо приближение к этому корню, а $x_{n+1} = f(x_n)$, то

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{1-q} |x_{n+1} - x_n|.$$

3. Так как $|e \sin E| < 1$ при $e < 1$, то возможно для каждого E подобрать такое число x , $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, что $\sin x = e \sin E$. Уравнение Кеплера приобретает вид

$$E - \sin x = M.$$

Мы упростим это уравнение, заменив $\sin x$ на x . Покажем, что это законно, если допустимо пренебречь величиной e^3 . Действительно,

$$x = e \sin E + \frac{1}{6} (e \sin E)^3 + \dots,$$

и поэтому

$$|x - e \sin E| < \frac{1}{6} e^3.$$

Так как величиной e^3 по условию можно пренебречь, то допустимо заменить x на $e \sin E$ и наоборот. Итак, уравнение Кеплера допустимо заменить следующим приближенным равенством:

$$M = E - x.$$

Но тогда

$$\sin M = \sin E \cos x - \cos E \sin x = \sin E \sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} - e \sin E \cos E,$$

т. е.

$$\sin M = \sin E (\sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} - e \cos E),$$

$$\cos M = \cos E \sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} + e \sin^2 E,$$

поэтому

$$\cos M = \cos E (\sqrt{1 - e^2 \sin^2 E} - e \cos E) + e.$$

Отсюда получаем следующую (приближенную) формулу:

$$\operatorname{tg} E = \frac{\sin M}{\cos M - e}.$$

4. $208^\circ 30'$.

6. $5^\circ 40'$.

7. $E = 2,34 \text{ рад}$, $r = 8,18 \cdot 10^3 \text{ км}$.

8. 133° , $r = 51 \cdot 10^3 \text{ км}$, $H = 44,3 \cdot 10^3 \text{ км}$, $V = 2,45 \text{ км/сек}$.

9. Пусть $\tau = 50^m = 3000^s$, $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 1,997 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$, $M = 0,060 \text{ рад}$.

Положим $E_0 = M$. Найдем последовательно $E_1 = M + e \sin E_0 = 0,090$, $E_2 = 0,105$, $E_3 = 0,112$, $E_4 = 0,116$, $E_5 = 0,118$, $E_6 = 0,119$, $E_7 = 0,119$. Можно принять

$$E = 0,119 \text{ рад}. \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} = 0,1031, \quad v = 11^\circ 48', \quad r = a(1 - e \cos E) = 50,3 \cdot 10^3 \text{ км}. \text{ При } \tau = 300^m: E = 0,667 \text{ рад}, \quad r = 60,8 \cdot 10^3 \text{ км}, \quad v = 61^\circ 13',$$

10.
$$e = \frac{r_a - r_{\Pi}}{r_a + r_{\Pi}} = \frac{2}{35}, \quad a = \frac{1}{2}(r_a + r_{\Pi}) = 7000 \text{ км}.$$

$$n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 1,078 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \quad t - \tau = 1^h 20^m, \quad M = 5,174 \text{ рад},$$

Уравнение Кеплера решим методом неподвижной точки. Положим $E_0 = M = 5,174$. Тогда $E_1 = M + e \sin M = 5,125$, $E_2 = 5,122$, $E_3 = 5,122$. Итак, $E =$

$$= 5,122, \text{ т. е. } E = 293^\circ,5. \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} = -0,6947, \text{ откуда } v = 290^\circ,5;$$

$$H = a(1 - e \cos E) - 6371 \approx 459 \text{ км}.$$

11. $r = a(1 - e \cos E)$, $a = 0,5(70 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^4) = 395 \cdot 10^3 \text{ км}$, $e = 61/79 \approx$

$$\approx 0,772, \quad t - \tau = 48^h, \quad n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = 254 \cdot 10^{-8} \text{ сек}^{-1}, \quad M = 0,493. \text{ Вычисляя } E \text{ методом неподвижной точки, найдем } E = 1,140. \text{ Тогда}$$

$$r = a(1 - e \cos E) \approx 267 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

12. $r_{\Pi} = 6371 + 630 = 7001 \text{ км}$, $V_{\Pi} = 14,0 \text{ км/сек}$, $V_{\Pi}^2 = K \left(\frac{2}{r_{\Pi}} - \frac{1}{a} \right)$, откуда $a = -4863 \text{ км}$. Таким образом, орбита — гипербола. Так как $r_{\Pi} = |a|(e - 1)$, то

$$e = 1 + \frac{r_{\Pi}}{|a|} \approx 2,439, \quad n = \sqrt{\frac{K}{|a|^3}} = 0,0019, \quad M = n(t - \tau) \approx 68,4 \text{ рад}.$$

Способом неподвижной точки найдем $H \approx 4,08$. Поэтому $r \approx 348 \cdot 10^3 \text{ км}$.

13. а) Когда $E = 144^\circ,9$, $t - \tau = \frac{T}{2\pi} (E - e \sin E) = 250^m 46^s,8$;

$$t = 1960, \text{ фев.}, 3,13^h 06^m 21^s,6 \text{ УТ.}$$

б) При $t - \tau = \frac{1}{4} T$ $E - e \sin E = \frac{\pi}{2}$. Решая это уравнение способом неподвижной точки (удобно принять $E_0 = 2$), найдем

$$E = 2,1886, \quad \text{т. е.} \quad E = 125^\circ 17'.$$

С помощью формул (4.1.8), (4.1.3) и (3.4.1) получаем

$$v = 158^\circ 18', \quad r = 39450 \text{ км.}$$

14. Из соотношений, приведенных в условии задачи, следует

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = 2 \operatorname{ctg} 2\gamma = \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma.$$

Поэтому

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} + \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{1}{3} (\operatorname{ctg}^3 \gamma - \operatorname{tg}^3 \gamma) = \frac{2}{3} \operatorname{ctg} 2\beta = D.$$

Таким образом, угол v , вычисляемый по алгоритму, который указан в условии задачи, действительно удовлетворяет уравнению Баркера. При указанных числовых данных получаем

$$v = -105^\circ 38', \quad r = 0,897 \text{ а. е.}$$

15. Воспользуемся алгоритмом, данным в задаче 14. Учтем, что $p = 2$ а. е., $K = 4\pi^2$, $D = 20\pi \sqrt{2}$. Получим

$$v = 162^\circ, \quad r = 40 \text{ а. е.}$$

§ 3

$$1. \quad t = \frac{p^2}{\sigma} \int_{-\omega}^{v-\omega} \frac{dv}{1+e \cos v},$$

$$\frac{p^2}{\sigma} = \sqrt{\frac{a^3}{K}} (1-e^2)^{3/2} = \frac{T}{2\pi} \left(1 - \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 - \dots \right),$$

$$\frac{1}{(1+e \cos v)^2} = 1 + \frac{(-2)}{1} e \cos v + \frac{(-2)(-3)}{1 \cdot 2} (e \cos v)^2 + \dots$$

Поэтому

$$\int_{-\omega}^{v-\omega} \frac{dv}{(1+e \cos v)^2} = v - 2e [\sin(v-\omega) + \sin \omega] + \frac{3}{4} e^2 [\sin 2(v-\omega) + \sin 2\omega] + \dots$$

Умножая этот ряд на ряд для p^2/σ и пренебрегая членами, содержащими e в степенях выше второй, получим требуемую формулу.

$$2. \quad E = 60^\circ 35', \quad v = 62^\circ 55', \quad r = 0,450 \text{ а. е.}$$

3. Пользуясь рядом Лагранжа для истинной аномалии с точностью до квадрата эксцентриситета, имеем

$$x = v - M = 2e \sin M + \frac{5}{2} e^2 \sin 2M.$$

Необходимое условие экстремума функции x запишется в виде

$$4e \cos M + 5e^2 \cos 2M = 0,$$

или

$$\cos^2 M + \frac{2}{5e} \cos M - \frac{1}{2} = 0,$$

откуда

$$\cos M = -\frac{1}{5e} \pm \frac{1}{5e} \left(1 + \frac{25}{4} e^2\right).$$

Так как $|\cos M| \leq 1$, то в последней формуле следует взять знак $+$. Получим

$$\cos M = \frac{5}{4} e.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x &= 2e \sin M \left(1 + \frac{5}{4} e \cos M\right) = 2e \sqrt{1 - \frac{25}{16} e^2} \left(1 + \frac{25}{16} e^2 + \dots\right) = \\ &= 2e \left(1 - \frac{25}{32} e^2 + \dots\right) \left(1 + \frac{25}{16} e^2 + \dots\right) = 2e + \frac{25}{16} e^3 + \dots \end{aligned}$$

Пренебрегая членами, содержащими e в степени выше второй, имеем $x_{\max} = 2e$.

4. $v - M = 2^\circ 40'$; при $M = 87^\circ 54'$.

$$5. \beta^m = \left(\frac{e}{2}\right)^m + m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+m-1)!}{k! (k+m)!} \left(\frac{e}{2}\right)^{2k+m}.$$

$$6. \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + e^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^{k-2}}{dM^{k-2}} (\sin^k M),$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^k}{dM^k} (\sin^k M).$$

7. Воспользуемся следующим признаком: для того чтобы функция $y = f(x)$ разлагалась в ряд Фурье вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

достаточно, чтобы $f(x)$ была периодической с периодом 2π , нечетной и непрерывно дифференцируемой в каждой точке x . При этом коэффициенты a_n могут быть вычислены по формуле

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Для функции $E - M$, определяемой из уравнения Кеплера, имеем

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (E - M) \sin nM \, dM = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} (E - M) d(\cos nM).$$

Интегрируя по частям, получим

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos nM d(E-M) = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos nM dE - \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} \cos nM dM.$$

Так как $M = E - e \sin E$, то

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos n(E - e \sin E) dE.$$

Итак,

$$E - M = e \sin E = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin nM.$$

Продифференцировав последний ряд почленно по M и воспользовавшись тем, что $r = a(1 - e \cos E)$, получим

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \cos nM.$$

8. а) Нетрудно проверить, что обе части приведенной формулы равны

$$F'(E) \frac{\partial F}{\partial e} \cdot \frac{\partial E}{\partial M} + F(E) \frac{\partial^2 E}{\partial e \partial M}.$$

б) Воспользуемся методом математической индукции. Проверим доказываемую формулу при $n=1$. Дифференцируя уравнения Кеплера по e и по M , получим

$$(1 - e \cos E) \frac{\partial E}{\partial e} - \sin E = 0, \quad (1 - e \cos E) \frac{\partial E}{\partial M} = 1.$$

Отсюда

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\partial E}{\partial M} \sin E. \quad (*)$$

Так как $\omega = f(E)$, то $\frac{\partial \omega}{\partial e} = f'(E) \frac{\partial E}{\partial e}$, т. е. $\frac{\partial \omega}{\partial e} = f'(E) \sin E \cdot \frac{\partial E}{\partial M}$.

Предположим теперь, что доказываемая формула справедлива при $n=k-1$:

$$\frac{\partial^{k-1} \omega}{\partial e^{k-1}} = \frac{\partial^{k-2}}{\partial M^{k-2}} \left[f'(E) \frac{\partial E}{\partial M} \sin^{k-1} E \right]. \quad (**)$$

Выведем отсюда, что доказываемая формула верна при $n=k$. Действительно, положив для краткости

$$F(E) = f'(E) \sin^{k-1} E \quad (***)$$

и учитывая формулу из пункта а), а также (**), (***) и (***), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \omega}{\partial e^k} &= \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial^{k-1} \omega}{\partial e^{k-1}} \right) = \frac{\partial}{\partial e} \left\{ \frac{\partial^{k-2}}{\partial M^{k-2}} \left[F(E) \frac{\partial E}{\partial M} \right] \right\} = \\ &= \frac{\partial^{k-2}}{\partial M^{k-2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial M} \left[F(E) \frac{\partial E}{\partial e} \right] \right\} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial M^{k-1}} \left[f'(E) \frac{\partial E}{\partial M} \sin^k E \right]. \end{aligned}$$

Итак из (***) следует, что доказываемая формула верна и при $n=k$, т. е. она верна для всех натуральных n .

в) Ряд Тейлора (по степеням e) функции $\omega=f(E)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^n,$$

где

$$A_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n \omega}{\partial e^n} \right)_{e=0}.$$

Так как при $e=0$ $\partial E/\partial M=1$ и $E=M$, то получаем искомый ряд.

Заметим, что аналогичные рассуждения применимы и в том случае, когда вместо уравнения Кеплера рассматривается более общее уравнение (4.3.6).

9. а) Из данной зависимости следует

$$z = t + \frac{\omega}{2} (z^2 - 1).$$

Полагая $\zeta=t$, $H(u)=u^2-1$, $F(u)=u$ и пользуясь рядом Лагранжа (6), получим

$$z = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\omega}{2} \right)^k \frac{d^{k-1} (t^2 - 1)^k}{dt^{k-1}}.$$

б) Продифференцировав предыдущую формулу почленно по t , получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\omega+\omega^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\omega}{2} \right)^k \frac{d^k (t^2 - 1)^k}{dt^k}.$$

Из предыдущего следует

$$P_k(t) = \frac{4}{2^k k!} \frac{d^k (t^2 - 1)^k}{dt^k} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

г) Если тождество

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\omega+\omega^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \omega^k$$

продифференцировать по ω , то получим

$$\frac{t-\omega}{\sqrt{(1-2t\omega+\omega^2)^3}} = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(t) \omega^{k-1}.$$

Из двух последних соотношений следует

$$(t-\omega) \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \omega^k = (1-2t\omega+\omega^2) \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(t) \omega^{k-1}.$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях ω и учитывая, что $P_0(t) \equiv 1$, получим

$$P_1(t_1) = t_1, \quad (k+1) P_{k+1}(t) - (2k+1) t P_k(t) + k P_{k-1}(t) = 0$$

§ 4

1. По формулам, связывающим элементы эллиптической орбиты, находим

$$a = \frac{1}{2}(r_{\text{п}} + r_{\text{а}}) = 180 \cdot 10^6 \text{ км}, \quad e = \frac{r_{\text{а}} - r_{\text{п}}}{r_{\text{а}} + r_{\text{п}}} = \frac{1}{3}, \quad p = a(1 - e^2) = 160 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

Положим $r_1 = SC$, $r_2 = SD$, $\beta = \angle CSD$. Тогда

$$s = CD = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \beta}. \quad (*)$$

Найдем β . Ясно, что $\beta = v_2 - v_1$, где v_1 и v_2 — истинные аномалии точек C и D . Далее

$$\cos v_1 = \frac{p - r_1}{r_1 e} = 0,2, \quad v_1 = 1,369 \text{ рад}.$$

Аналогично $\cos v_2 = \frac{p - r_2}{r_2 e} = -0,8947$, $v_2 = 2,679 \text{ рад}$, $\beta = v_2 - v_1 = 1,310 \text{ рад}$.

По формуле (*) получим $s = 238 \cdot 10^6 \text{ км}$.

$$\cos \lambda_1 = 1 - \frac{r_1 + r_2 + s}{2a} = -0,2941, \quad \lambda_1 = 1,869, \quad \sin \lambda_1 = 0,9558,$$

$$\cos \lambda_2 = 1 - \frac{r_1 + r_2 - s}{2a} = 0,7059, \quad \lambda_2 = 0,787, \quad \sin \lambda_2 = 0,7082.$$

$$\frac{1}{n} = 6,637 \cdot 10^3, \quad t = \frac{1}{n} [(\lambda_1 - \lambda_2) - (\sin \lambda_1 - \sin \lambda_2)] \approx 64^{\text{д}}.$$

2. Имеем $r_1 = SC = 150 \cdot 10^6 \text{ км}$, $r_2 = SD = 800 \cdot 10^6 \text{ км}$, $V_1 = 50,0 \text{ км/сек}$, $K_C = 1327 \cdot 10^8 \text{ км}^3/\text{сек}^2$. Из формулы

$$V_1^2 = K_C \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)$$

получим, что $a = -180,7 \cdot 10^6 \text{ км}$. Поэтому орбита — гипербола, и следует применить формулу Ламберта в ее гиперболическом варианте. Находим

$$S = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 814 \cdot 10^6 \text{ км},$$

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{|a|^3}{K_C}} = 6673 \cdot 10^3, \quad \text{ch } \lambda'_1 = 1 + \frac{r_1 + r_2 + s}{2|a|} = 5,881.$$

По таблицам гиперболических функций найдем

$$\lambda'_1 = 2,458, \quad \text{sh } \lambda'_1 = 5,798.$$

Аналогично

$$\text{ch } \lambda'_2 = 1 + \frac{r_1 + r_2 - s}{2|a|} = 1,376, \quad \lambda'_2 = 0,843, \quad \text{sh } \lambda'_2 = 0,946.$$

После этого вычисляем время перелета t :

$$t = \frac{1}{n} [(\text{sh } \lambda'_1 - \lambda'_1) - (\text{sh } \lambda'_2 - \lambda'_2)] \approx 265^{\text{д}}.$$

3. Скорость аппарата близка к параболической, поэтому для подсчета времени перелета допустимо воспользоваться формулой Ньютона—Эйлера. Имеем

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos 60^\circ} = 195 \cdot 10^6 \text{ км}, \quad K = 1327 \cdot 10^8 \text{ км}^3/\text{сек}^2.$$

По формуле (4.4.4) найдем

$$t = 515 \cdot 10^4 \text{ сек} \approx 60^{\text{д}}.$$

4. У к а з а н и е. Исключите из уравнения Ламберта углы λ_1 и λ_2 и представьте его в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням $1/a$. Далее необходимо перейти к пределу в правой и левой частях получившегося уравнения при $a \rightarrow \infty$.

§ 5

1. Плоскость орбиты повернется на 90° , размеры и форма орбиты не изменятся.

2. Пусть P — точка, имеющая на исходной орбите истинную аномалию v . Значения величин r, V, v, β в точке P до сообщения спутнику импульса скорости обозначим через r_n, V_n, v_n, β_n , а после этого момента — через r_k, V_k, v_k, β_k .

3. Из данных нетрудно вычислить, что до импульса $e_n = 0,508$, $a_n = 3,34R_3$, $v_n = 62^\circ 23'$. Из уравнения орбиты и интеграла энергии находим $r_n = 4,41R_3$, $r_n V_n^2 = 0,68K$, откуда $V_n = 0,823V_{кр}$, где $V_{кр}$ — местная круговая скорость в точке P . Угол β_n найдем из уравнения

$$e_n^2 = \left(\frac{r_n V_n^2}{K} - 1 \right)^2 \sin^2 \beta_n + \cos^2 \beta_n,$$

откуда $\beta_n = 76^\circ$.

После импульса имеем $a_k = 3,60R_3$, $r_k = r_n$, $v_k = v_n = 150^\circ$. Мы можем вычислить $a_k/r_k = 3,60/4,41$. Пользуясь интегралом энергии, найдем, что $r_k V_k^2 = 0,780K$, откуда $V_k = 0,882V_{кр}$. Вычисляем затем β_k и e_k из формул

$$\operatorname{tg} v_k = \frac{1}{2} \frac{\frac{r_k V_k^2}{K} \sin 2\beta_k}{\frac{r_k V_k^2}{K} \sin^2 \beta_k - 1},$$

$$e_k^2 = \left(\frac{r_k V_k^2}{K} - 1 \right)^2 \sin^2 \beta_k + \cos^2 \beta_k.$$

Получаем $\beta_k = 89^\circ$, $e_k = 0,30$. Искомый импульс скорости ΔV можно найти из формулы

$$(\Delta V)^2 = V_k^2 + V_n^2 - 2V_k V_n \cos(\beta_k - \beta_n).$$

Отсюда $\Delta V = 0,202V_{кр}$ ($V_{кр}$ — местная круговая скорость в точке P).

4. Пусть γ — угол между векторами V_1 и V_2 . По теореме Пифагора для сферического треугольника $\cos \gamma = \cos \varphi \cos \psi$. Применяя теорему косинусов для плоского треугольника, находим

$$(\Delta V)^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos \varphi \cos \psi.$$

5. Пусть r_{ak} и r_{pk} — расстояния притягивающего центра от апогея и перигея орбиты Γ_k ($k = 1, 2$).

Тогда

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \sqrt{\frac{K}{r_{n1}}} \left(\sqrt{\frac{2r_{a2}}{r_{n1} + r_{a2}}} - \sqrt{1 + e_1} \right) + \\ + \sqrt{\frac{K}{r_{a2}}} \left(\sqrt{1 - e_2} - \sqrt{\frac{2r_{n1}}{r_{n1} + r_{a2}}} \right).$$

6. Воспользуемся формулами, описывающими орбиту:

$$\operatorname{tg} v = \frac{1}{2} \frac{L \sin 2\beta}{L \cos^2 \beta - 1}, \quad e^2 = (L-1)^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta, \quad \frac{a}{r} = \frac{1}{2-L},$$

где $L = rV^2/K$. Тогда $\operatorname{tg} v = f(L, \beta)$, $\sec^2 v \, dv = \frac{\partial f}{\partial L} dL + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta$. Но $d\beta = 0$ (ибо импульс скорости — в направлении движения). Поэтому

$$\sec^2 v \, dv = -\frac{2 \operatorname{tg}^2 v}{L^2 \sin 2\beta} dL,$$

откуда

$$dv = -\frac{\sin^2 v \, dL}{L^2 \sin \beta \cos \beta}.$$

Но $V \sin \beta = \dot{r} = Ke \sin v / rV \cos \beta$, откуда

$$L \sin \beta \cos \beta = e \sin v.$$

Следовательно,

$$dv = -\frac{2 \sin v \, dV}{e \, V} \quad \text{или} \quad dv = -\frac{2 \sin v}{e} \sqrt{\frac{r}{K \left(2 - \frac{r}{a}\right)}} dV.$$

7. $|\Delta V_1| = |\Delta V_2| = \sqrt{\frac{K}{r_0}} (V\sqrt{2} - 1) \approx 12,3 \text{ км/сек}$. Параболическая траектория перехвата $P_1 P_2$, очевидно, симметрична относительно своей линии апсид. Поэтому согласно формуле (4.1.15) время $2t$ полета для перехвата корабля равно

$$2t = \frac{2}{3} (r+p) \sqrt{\frac{2r-p}{K}}, \quad r = r_0 = p = 1 \text{ а. е.}$$

Поэтому

$$2t = \frac{4}{3} r \sqrt{\frac{r}{K}}.$$

Если T_0 — период обращения корабля вокруг Солнца ($T_0 = 1$ год), то

$$\frac{T_0^3}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{K}, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{\frac{r_0^3}{K}} = \frac{T_0}{2\pi}.$$

Поэтому

$$2t = \frac{2T_0}{3\pi} \approx 77,47.$$

За это время радиус-вектор корабля успел описать угол $\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{2T_0}{3\pi} = \frac{4}{3} \text{ рад}$.

Поэтому $\varphi_0 = \left(\pi - \frac{4}{3}\right) \text{ рад}$.

8. Обозначим через t_{23} время, оставшееся до встречи спутников. Тогда $t_{23} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{K} \frac{\varphi_{23}}{360}} = 2930^{\text{с}}$. Спутник S_1 будет осуществлять перехват, двигаясь по некоторой кеплеровской орбите L , проходящей через P_1 и P_2 , причем $TP_1 = TP_2$. Ясно, что точки P_1 и P_2 симметричны относительно линии апсид орбиты L и время перелета от P_1 до P_2 по орбите перехвата вдвое больше времени полета по этой орбите от перигея Π до точки P_2 , истинная

аномалия которой $v = \frac{1}{2} (\varphi_{12} + \varphi_{23})$. Пусть e — эксцентриситет орбиты L . Тогда из уравнений

$$e^2 = \left(\frac{rV^2}{K} - 1 \right)^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta$$

и

$$\operatorname{tg} v = \frac{1}{2} \frac{\frac{rV^2}{K} \sin 2\beta}{\frac{rV^2}{K} \sin^2 \beta - 1}$$

мы нашли бы rV^2/K , а затем и a из интеграла энергии

$$a = \frac{r}{\frac{rV^2}{K} - 2}.$$

Зная a и e , мы могли бы затем с помощью уравнения Кеплера вычислить время перелета $2t_h$; оно должно было бы оказаться равным t_{23} .

Однако в действительности e нам не известно. Поэтому подбираем e «способом проб и ошибок».

В нашем случае положим $e = 2,0$. Тогда $rV^2/K = 3,58$, $a = 1,90R_3$, $2t_h = 3380^s < t_{23}$. Берем $e = 2,5$. Тогда $rV^2/K = 4,41$, $a = 1,24R_3$, $2t_h = 2920^s$, $\beta = 45^\circ$.

Такое значение e вполне удовлетворительно. В точке P_1 круговая скорость $V_{кр} = \sqrt{\frac{K}{r}} = \frac{1}{\sqrt{3}} V_1$, где V_1 — первая космическая скорость. Скорости в точках P_1 и P_3 равны

$$V_1 = V_3 = \sqrt{\frac{4,41}{3}} V_1.$$

Поэтому $\Delta V = \sqrt{V_{кр}^2 + V_3^2 - 2V_3 V_{кр} \cos \beta} = 7,67$ км/сек.

Такой же импульс скорости необходим в точке P_3 .

§ 6

1. Из (7) следует $\bar{\omega}\ddot{\omega} = -K/r$, $\bar{\omega}\ddot{\omega} + \dot{\omega}\dot{\omega} = -\frac{K}{r} + |\dot{\omega}|^2$, $\frac{d}{dt}(\bar{\omega}\dot{\omega}) = \frac{K}{r} + |\dot{\omega}|^2$.

Поэтому

$$\operatorname{Im} \left[\frac{d}{dt} (\bar{\omega}\dot{\omega}) \right] = 0, \quad \frac{d}{dt} [\operatorname{Im} (\bar{\omega}\dot{\omega})] = 0, \quad \operatorname{Im} (\bar{\omega}\dot{\omega}) = \sigma,$$

где σ — вещественная постоянная.

Подставляя в эту формулу вместо ω величину $re^{i\psi}$, получим $r^2\dot{\psi} = \sigma$. Для получения интеграла энергии заметим, что из (4.6.3) следует

$$\frac{\dot{\omega}\ddot{\omega}}{\omega\dot{\omega}} = -\frac{K\dot{\omega}\ddot{\omega}}{r^3}$$

и (после перехода к сопряженным переменным)

$$\frac{\dot{\omega}\ddot{\omega}}{\dot{\omega}\omega} = -\frac{K\bar{\omega}\ddot{\omega}}{r^3}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\frac{d}{dt}(\dot{\omega}\bar{\omega}) = -\frac{K}{r^3} \frac{d}{dt}(\omega\bar{\omega}),$$

т. е.

$$\frac{dV^2}{dt} = -\frac{K}{r^3} \frac{dr^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2K}{r} \right),$$

откуда

$$V^2 = \frac{2K}{r} + h,$$

где h — вещественная постоянная.

2. Из равенств $\omega = re^{i\nu}$, $\dot{\omega} = -K\omega/r^3$ и $\sigma = r^2\dot{\nu}$ (интеграл площадей) следует, что

$$\sigma\ddot{\omega} = -K\dot{\nu}e^{i\nu},$$

откуда $\sigma\dot{\omega} + Ke^{i\nu} = -\Lambda$ (интеграл Лапласа), где Λ — комплексная постоянная. Величину Λ можно записать в комплексной форме так: $\Lambda = \lambda e^{i\nu_0}$, где λ — неотрицательное число, а ν_0 — угол наклона вектора Λ к вещественной оси. Если направление вещественной оси выбрано так, что оно совпадает с направлением вектора Лапласа Λ , то $\nu_0 = 0$, $\Lambda = \lambda$ и

$$\sigma\dot{\omega} + Ke^{i\nu} = -\lambda.$$

3. Из интеграла площадей и формулы $\omega = re^{i\nu}$ следует

$$\dot{\omega} = \left(\dot{r} + \frac{i\sigma}{r} \right) e^{i\nu}.$$

Подставив это значение для $\dot{\omega}$ в интеграл Лапласа, получим

$$-i\sigma\dot{r} + \frac{\sigma^2}{r} - K = \lambda e^{-i\nu}.$$

Приравняв вещественные части обеих частей последнего равенства, найдем (при $\sigma \neq 0$), что

$$r = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos \nu},$$

где $\rho = \sigma^2/K$, $\varepsilon = \lambda/K$.

4. Из интеграла Лапласа имеем

$$\dot{\omega} = \frac{i}{\sigma} (\lambda + Ke^{i\nu}).$$

Учитывая, что в уравнении орбиты $\rho = \sigma^2/K$, $\varepsilon = \lambda/K$, получаем

$$\dot{\omega} = i \sqrt{\frac{K}{\rho}} (\varepsilon + \exp i\nu),$$

или

$$\dot{\omega} = i\varepsilon \sqrt{\frac{K}{\rho}} + \sqrt{\frac{K}{\rho}} e^{i\left(\nu + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Отсюда видно, что на комплексной плоскости точка $\dot{\omega}$ лежит на окружности γ с центром в $i\varepsilon \sqrt{K/\rho}$ и радиусом $\sqrt{K/\rho}$. Для построения вектора скорости спутника в момент, когда его истинная аномалия равна ν , следует провести

через центр $i e \sqrt{K/\rho}$ окружности γ радиус, образующий угол $\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$ с вещественной осью; вектор, имеющий своим концом конец этого радиуса, а своим началом — начало координат, и есть искомый вектор скорости. Годографом скорости может оказаться окружность (если орбита — эллипс), окружность без одной точки (если орбита — парабола) или дуга окружности (в случае гиперболической орбиты).

5. Прямое следствие из формулы для $\dot{\omega}$, полученной в решении задачи 4. Орт нормали к оси аписид и орт трансверсали соответственно имеют комплексные координаты i и $\exp i\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$. Поэтому

$$V_2 = e \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad V_1 = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

6. Пусть ω_k и E_k — комплексная координата и эксцентрическая аномалия точки P_k ($k=1, 2$). Тогда

$$\omega_k = a \cos E_k + i b \sin E_k,$$

$$\dot{\omega}_k = \frac{n}{1 - e \cos E_k} (-a \sin E_k + i b \cos E_k),$$

где a и b — большая и малая полуоси эллипса. Если учтем, что $V_k = |\dot{\omega}_k|$ и $E_2 = E_1 + \pi$, то получим

$$V_1 V_2 = |\dot{\omega}_1| |\dot{\omega}_2| = |-a \sin E_1 + i b \cos E_1 \cdot a \sin E_1 - i b \cos E_1| \frac{n^2}{1 - e^2 \cos^2 E_1} = \frac{n^2 (a^2 \sin^2 E_1 + b^2 \cos^2 E_1)}{1 - e^2 \cos^2 E_1} = n^2 a^2 = \text{const.}$$

7. Пусть O — центр эллипса, A — фокус, занятый притягивающим центром, F — «пустой» фокус. Примем за ось Ox линию аписид, за ось Oy — прямую, получающуюся из линии аписид поворотом на 90° в направлении движения спутника. Плоскость орбиты (при указанном выборе осей координат) будем рассматривать как комплексную числовую плоскость. Пусть ω — комплексная координата спутника S в момент t , E — его эксцентрическая аномалия, ζ — комплексная координата вектора \overline{FS} , ρ — его длина, r — расстояние от спутника до притягивающего центра. Тогда $\zeta = c + \omega$ (c — половина расстояния между фокусами), $\rho = 2a - r$, $\omega = a \cos E + i b \sin E$ (a и b — большая и малая полуоси эллипса),

$$\dot{\zeta} = \dot{\omega} = (-a \sin E + i b \cos E) \dot{E}.$$

Но $\dot{E} = n/(1 - e \cos E)$ (в силу уравнения Кеплера). Поэтому $\dot{\zeta} = n(-a \sin E + i b \cos E)/(1 - e \cos E)$. С другой стороны, если φ — угол наклона вектора \overline{FS} к оси аписид, то

$$\zeta = \rho e^{i\varphi}, \quad \dot{\zeta} = (\dot{\rho} + i\rho\dot{\varphi}) e^{i\varphi} = \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + i\dot{\varphi}\right) \zeta.$$

В задаче требуется вычислить $\dot{\varphi}$. Сопоставляя два полученных выражения для $\dot{\zeta}$, имеем

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + i\dot{\varphi} = \frac{n(-a \sin E + i b \cos E)}{\zeta(1 - e \cos E)}.$$

В правой части освободимся от мнимостей в знаменателе, умножив числитель и знаменатель на $\zeta = c + a \cos E - ib \sin E$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}}{\rho} + i\dot{\varphi} &= \frac{n(-a \sin E + ib \cos E)(c + a \cos E - ib \sin E)}{\rho^2(1 - e \cos E)} = \\ &= \frac{na(1 + e \cos E)(-c \sin E + ib)}{[a(1 + e \cos E)]^2(1 - e \cos E)} = \frac{n(ib - c \sin E)}{a(1 - e^2 \cos^2 E)}. \end{aligned}$$

Отсюда можно найти $\dot{\varphi}$, приравняв мнимые части обеих частей последнего равенства:

$$\dot{\varphi} = \frac{nb}{a(1 - e^2 \cos^2 E)}.$$

Последнее выражение можно немного преобразовать. Из формулы для комплексной скорости \dot{w} следует, что направление движения спутника в данный момент t характеризуется вектором с комплексной координатой $v = -a \sin E + ib \cos E$. Но v можно записать еще так:

$$v = a \cos\left(\frac{\pi}{2} + E\right) + ib \sin\left(\frac{\pi}{2} + E\right).$$

Отсюда видно, что v — комплексная координата той точки Q эллиптической орбиты, которая в данный момент t имеет эксцентрическую аномалию $\pi/2 + E$. Обозначим через d длину полуэллипса OQ (этот полуэллипс параллелен вектору скорости спутника). Тогда

$$\begin{aligned} d^2 = |v|^2 &= a^2 \sin^2 E + b^2 \cos^2 E = a^2(1 - \cos^2 E) + b^2 \cos^2 E = \\ &= a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 E = a^2(1 - e^2 \cos^2 E), \end{aligned}$$

и поэтому $\dot{\varphi} = nab/d^2$, т. е. $\dot{\varphi} = \sigma/d^2$.

8. Рассмотрим комплексную плоскость, для которой нулевой точкой служит центр O эллипса, вещественной осью Ox — линия аписид, а ось Oy образована из оси Ox поворотом на 90° в направлении движения спутника S . Пусть w — комплексная координата спутника S в заданный момент t , \dot{w} — его комплексная скорость, $2c$ — расстояние между фокусами. Обозначим через α_1 угол между вектором \overline{AS} и вектором скорости, через α_2 — угол между вектором скорости и вектором SF . Тогда

$$\alpha_1 = \arg \frac{\dot{w}}{w - c}, \quad \alpha_2 = \arg \frac{-c - w}{\dot{w}}.$$

Нам предстоит убедиться, что $\alpha_1 = \alpha_2$, а для этого достаточно показать, что число

$$B = \frac{\dot{w}^2}{c^2 - w^2}$$

— положительное вещественное число. Но

$$\begin{aligned} w &= a \cos E + ib \sin E, & w^2 &= a^2 \cos^2 E - b^2 \sin^2 E + iab \sin 2E, \\ c^2 - w^2 &= a^2 \sin^2 E - b^2 \cos^2 E - iab \sin 2E, & \dot{w} &= (-a \sin E + ib \cos E) \dot{E}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$B = \dot{E}^2 > 0.$$

А это, как мы видели, и означает, что $\alpha_1 = \alpha_2$. Кроме того, мы установили, что

$$\dot{\omega}^2 = (c - \omega)(c + \omega) \dot{E}^2,$$

откуда

$$V = |\dot{\omega}| = \sqrt{|c - \omega| |c + \omega|} \dot{E} = \sqrt{\rho r} \dot{E}.$$

9. Введем обозначения: $Z = e^{iz}$, $W = e^{i\omega}$. Тогда

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} : \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{i} \frac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1}, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{1}{i} \frac{W^2 - 1}{W^2 + 1},$$

и данное уравнение приобретает вид

$$\frac{W^2 - 1}{W^2 + 1} = \lambda \frac{Z^2 - 1}{Z^2 + 1}, \quad W^2 = Z^2 \frac{1 - \mu Z^{-2}}{1 - \mu Z^2},$$

где

$$\mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad |\mu| < 1.$$

Отсюда, логарифмируя, найдем

$$\begin{aligned} \omega &= z + \frac{1}{2i} \ln(1 - \mu e^{-2iz}) - \frac{1}{2i} \ln(1 - \mu e^{2iz}) = \\ &= z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{2ik} (e^{2kiz} - e^{-2kiz}) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{k} \sin 2kz. \end{aligned}$$

10. Легко найти, что $\varepsilon = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}$,

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

Рассуждая, как и при решении задачи 9, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \frac{1}{i} \frac{e^{i\nu} - 1}{e^{i\nu} + 1} = \frac{1}{i} \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \frac{1}{i} \frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Из последних трех равенств следует

$$\frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \frac{\eta - 1}{\eta + 1},$$

откуда

$$\xi = \eta \frac{1 - \beta\eta^{-1}}{1 - \beta\eta}, \quad \eta = \xi \frac{1 + \beta\xi^{-1}}{1 + \beta\xi}.$$

Логарифмируя и пользуясь рядом Тейлора для логарифма, получим на основании указанных в условии задачи зависимостей между ξ и ν , η и E требуемые разложения.

11. Как известно из аналитической геометрии, касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $P(x, y)$ имеет уравнение $\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1$ (здесь X, Y — текущие координаты точек касательной). Поэтому угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке (x, y) равен $-b^2x/(a^2y)$, а угловой коэффициент нормали к эллипсу в той же точке равен $a^2y/(b^2x)$, т. е. $\operatorname{tg} \varphi = a^2y/(b^2x)$. Очевидно, что $\operatorname{tg} \varphi' = y/x$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - e_n^2) \operatorname{tg} \varphi,$$

где e_n — эксцентриситет эллипса. Выразим $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{tg} \varphi'$ соответственно через $e^{i\varphi}$ и $e^{i\varphi'}$. Будем иметь

$$\frac{e^{2i\varphi'} - 1}{e^{2i\varphi'} + 1} = (1 - e_n^2) \frac{e^{2i\varphi} - 1}{e^{2i\varphi} + 1},$$

откуда

$$e^{2i\varphi'} = \frac{e^{2i\varphi} + \lambda}{\lambda e^{2i\varphi} + 1},$$

где

$$\lambda = \frac{e_n}{2 - e_n}, \quad e^{2i(\varphi - \varphi')} = \frac{1 + \lambda e^{2i\varphi}}{1 + \lambda e^{-2i\varphi}}.$$

Отсюда можно, во-первых, найти $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')$:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{1}{i} \frac{e^{2i(\varphi - \varphi')} - 1}{e^{2i(\varphi - \varphi')} + 1} = \frac{\lambda \sin 2\varphi}{1 + \lambda \cos 2\varphi}.$$

Во-вторых, из той же формулы получаем

$$2i(\varphi - \varphi') = \ln(1 + \lambda e^{2i\varphi}) - \ln(1 + \lambda e^{-2i\varphi}),$$

$$\varphi - \varphi' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k} \sin 2k\varphi.$$

Пренебрегая членами порядка выше второго относительно λ , получим приближенную формулу

$$\varphi - \varphi' = \lambda \sin 2\varphi - \frac{\lambda^3}{2} \sin 4\varphi.$$

Переходя от радианной меры к градусной и учитывая, что в случае Земли $f = 1/298,2$ и $e_n^2 = 2f - f^2$, найдем

$$\varphi - \varphi' = 696'',8 \sin 2\varphi - 1'',18 \sin 4\varphi.$$

Г Л А В А V

§ 1

1. Пусть x, y, z — искомые декартовы координаты перигея орбиты спутника, ξ, η, ζ — орбитальные координаты. Тогда

$$\xi = a(1 - e), \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Из (5.1.4) следует, что

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} a(1 - e) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \omega - \sin \delta \sin \omega \cos i \\ \sin \delta \cos \omega + \cos \delta \sin \omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix} a(1 - e) = 5600 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix},$$

т. е. $x \approx -1980$ км, $y \approx 3960$ км, $z \approx 3430$ км. Далее,

$$r = a(1 - e) = 5600 \text{ км}, \quad \sin \delta = \frac{z}{r} = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0,6125,$$

$$\delta \approx 37^\circ 46', \quad \cos \delta = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r \cos \delta} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,447; \quad \alpha = 10^{\text{h}} 05^{\text{m}} 48^{\text{s}}.$$

$$2. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \delta \mathcal{L} \sin i \\ -\cos \delta \mathcal{L} \sin i \\ \cos i \end{bmatrix}.$$

3. Сначала определяем p :

$$p = \frac{r_0(1 + e \cos v_0)}{1 - e^2}.$$

Пользуясь формулой (5.1.4), находим при любом v :

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} r \cos v \\ r \sin v \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v}.$$

Отсюда можно получить V :

$$V = B \left\{ \begin{bmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{bmatrix} r \dot{v} + \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \dot{r} \right\} = B \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{Kp}}{r} \sin v + \sqrt{\frac{K}{p}} e \sin v \cos v \\ \frac{\sqrt{Kp}}{r} \cos v + \sqrt{\frac{K}{p}} e \sin^2 v \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В последних формулах следует заменить r и v на r_0 и v_0 .

4. Вычисляем E из уравнения Кеплера, полагая $t - \tau = -30$ суток, $n = \sqrt{K/a^3}$. Затем по формуле (5.1.1) получаем искомые координаты x, y, z .

5. У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой (5.1.1.)

6. Пусть r_1 — геоцентрическое расстояние нисходящего узла \mathcal{L} . Тогда $r_1 = p/[1 + e \cos(180^\circ - \omega)]$. Координаты нисходящего узла \mathcal{L} таковы: $(-r_1 \cos \delta \mathcal{L}, -r_1 \sin \delta \mathcal{L}, 0)$. Зная истинную аномалию $v_1 = 180^\circ - \omega$ точки \mathcal{L} , вычисляем ее эксцентрическую аномалию по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_1}{2},$$

а затем и время перелета $t_1 - \tau$ от перигея до нисходящего узла, воспользовавшись уравнением Кеплера

$$t_1 - \tau = \frac{1}{n} (E_1 - e \sin E_1), \quad \text{где} \quad n = \sqrt{K/a^3}.$$

Отсюда получаем t_1 .

Аналогично находим момент t_2 прохождения спутника через восходящий узел. Координаты апогея вычисляем по формуле (5.1.1.).

§ 2

1. Из условия задачи легко найти, что $r_1 = 13$ а.е., $r_2 = 26/3$ а.е. и что векторы r_1 и r_2 коллинеарны и противоположно направлены. Так как $v_1 = 120^\circ$ (по условию), то $v_2 = 300^\circ$.

Из равенств $r_k = p/(1 + e \cos v_k)$ ($k = 1, 2$) непосредственно следует $r_1/r_2 = (1 + e \cos v_2)/(1 + e \cos v_1)$. Отсюда находим $e = 2/21$. Из равенства $r_1 = a(1 - e^2)/(1 + e \cos v_1)$ получим $a = 260/61$ а.е.

При повороте орбиты вокруг прямой, проходящей через точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) на произвольный угол, она по-прежнему будет удовлетворять всем указанным в задаче требованиям, но при этом изменятся элементы $\delta\Omega, i, \omega$. Следовательно, эти элементы не могут быть найдены из условия задачи. То же, очевидно, верно и для элемента τ .

2. Пусть ракета оказалась над точкой P_1 в момент t_1 . Рассмотрим вращающуюся систему координат x, y, z с началом в центре Земли O , ось z , перпендикулярной плоскости экватора, и осью x , проходящей через точку пересечения гринвичского меридиана с экватором в момент t_1 . Так как Земля за 6 час повернулась на $360^\circ \cdot 6 \cdot 3600/86164 = 90^\circ,25$, то точка P_2 будет иметь относительно системы отсчета xyz долготу $\lambda'_2 = 90^\circ,25 + \lambda_2 = 270^\circ,25$. Обозначим через ρ_1 и ρ_2 орты векторов $\overline{OP_1}$ и $\overline{OP_2}$:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 \cdot i + \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 \cdot j + \sin \varphi_1 \cdot k, \\ \rho_2 &= \cos \varphi_2 \cos \lambda'_2 \cdot i + \cos \varphi_2 \sin \lambda'_2 \cdot j + \sin \varphi_2 \cdot k. \end{aligned}$$

Нормаль к плоскости орбиты совпадает по направлению с вектором $\rho_3 = [\rho_1, \rho_2]$. Угол i между вектором ρ_3 и ортом k оси z можно найти из зависимости

$$k \cdot \rho_3 = |\rho_3| \cos i.$$

Итак,

$$\cos i = \frac{k \cdot [\rho_1, \rho_2]}{|[\rho_1, \rho_2]|},$$

причем

$$k \cdot [\rho_1, \rho_2] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 & \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 \cos \lambda'_2 & \cos \varphi_2 \sin \lambda'_2 & \sin \varphi_2 \end{vmatrix}$$

и

$$[\rho_1, \rho_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 & \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 \cos \lambda'_2 & \cos \varphi_2 \sin \lambda'_2 & \sin \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

После выкладок получим $\cos i = 0,006$, $i \approx 89^\circ$.

3. Пусть I, J, K — орты координатных осей x, y, z ; i, j, k — орты осей орбитальной системы координат ξ, η, ζ ; тогда

$$\begin{aligned} r_1 &= d(2I + J), & r_2 &= d(I + J + K), & r_3 &= d(-I + J), \\ k &= \frac{[r_1, r_2]}{|[r_1, r_2]|}, & [r_1, r_2] &= d^2(I - 2J + K), & |[r_1, r_2]| &= d^2\sqrt{6}, \\ k &= \frac{1}{\sqrt{6}}(I - 2J + K). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sin \delta\Omega, \sin i = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos \delta\Omega, \sin i = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos i = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Так как $0 \leq i \leq 180^\circ$, то $\sin i > 0$, $\sin i = \sqrt{1 - \cos^2 i} = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Следовательно, $\sin \delta_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \delta_{\mathcal{L}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, откуда
 $i = 65^\circ 54'$, $\delta_{\mathcal{L}} = 26^\circ 33'$.

Найдем c_1 и c_3 (см. формулы (5.2.2)):

$$c_1 \cdot [r_1, r_3] = [r_2, r_3],$$

т. е. $c_1 d^2 (I - 2J + K) = d^2 (I - 2J + K)$, откуда $c_1 = 1$. Аналогично найдем, что $c_2 = 1$. Из (5.2.3) получим $p - r_2 = (p - r_1) + (p - r_3)$, откуда $p = r_1 - r_2 + r_3$. Выше мы уже выразили r_1, r_2, r_3 через I, J, K . Отсюда легко вычислить модуль этих векторов:

$$r_1 = d\sqrt{5}, \quad r_2 = d\sqrt{3}, \quad r_3 = d\sqrt{2}.$$

Поэтому

$$p = d(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) \approx 1,908 d.$$

Согласно (5.2.4)

$$e[r_1, r_3] = |(p - r_1)r_3 - (p - r_3)r_1|,$$

$$ed^2\sqrt{6} = |-0,328d^2(-I + K) - 0,494d^2(2I + J)| \approx 0,887d^2.$$

Отсюда $e \approx 0,362$. Движение — эллиптическое. Вычислим ω . Сначала найдем векторы i и j . По формуле (5.2.5)

$$0,887d^2 j = d^2 (-0,660I - 0,494J - 0,328K),$$

откуда

$$j = -0,744I - 0,557J - 0,370K, \quad i = j \times k = -0,529I + 0,153J + 0,834K,$$

$$\beta = \cos \delta_{\mathcal{L}} \cdot I + \sin \delta_{\mathcal{L}} \cdot J = \frac{2}{\sqrt{5}} I + \frac{1}{\sqrt{5}} J.$$

Угол ω определим из зависимостей (см. (5.2.5))

$$\beta \cdot i = \cos \omega, \quad \beta \cdot j = \cos(90^\circ + \omega) = -\sin \omega,$$

$$\cos \omega = -0,4047, \quad \sin \omega = \frac{1}{\sqrt{5}} (2 \cdot 0,744 + 0,557) > 0.$$

По таблицам вычисляем $\omega = 113^\circ 50'$. Из формул (5.2.6) — (5.2.7) можно найти момент τ прохождения спутника через перигей. Действительно,

$$a = p/(1 - e^2) \approx 44\,200 \text{ км}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2} \approx 41\,700 \text{ км}, \quad r_2 \cdot i = 9160 \text{ км},$$

$$r_2 \cdot j = -33\,420 \text{ км}.$$

Поэтому (см. (5.2.7))

$$\sin E_2 = -0,8014, \quad \cos E_2 > 0, \quad E_2 = 4,071 \text{ рад},$$

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{a^3}{K}} = 954,5, \quad t_2 - \tau = \frac{1}{n} (E_2 - e \sin E_2) = 3680^s,$$

откуда $\tau \approx 11^h$.

$$4. \quad e = \frac{\lambda}{K}, \quad p = \frac{\sigma^2}{K}, \quad a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{K\sigma^2}{K^2 - \lambda^2}, \quad \cos i = \frac{\sigma \cdot k}{\sigma},$$

где k — орт оси z . Отсюда находим i . Пусть $i \neq 0$, $\beta = \left[k, \frac{\sigma}{\sigma \sin i} \right]$. Тогда проекции вектора β на оси x и y равны соответственно $\cos \delta_{\mathcal{L}}$ и $\sin \delta_{\mathcal{L}}$:

$\cos \delta \mathcal{L} = \beta \cdot i$, $\sin \delta \mathcal{L} = \beta \cdot j$ (i, j — соответственно орты осей x, y). Отсюда можно вычислить $\delta \mathcal{L}$. Имеем

$$\beta \cdot \lambda = \lambda \cos \omega, \quad [\beta, \lambda] = \frac{\sigma}{\sigma} \sin \omega.$$

Отсюда определяем ω .

5. $\sigma = [r_1, V_1]$, $\lambda = -[\sigma, V_1] - \frac{Kr_1}{r_1}$. По формулам из решения предыдущей задачи находим $e, p, \delta \mathcal{L}, i, \omega$. Из формулы $r_1 = a(1 - e \cos E_1)$ найдем $\cos E_1$, а затем $\sin E_1$ и E_1 . Величину τ можно получить из уравнения Кеплера

$$E_1 - e \sin E_1 = n(t_1 - \tau).$$

6. Пусть линия апсид $S\Pi$ наклонена к оси SR под углом ω . Имеем из уравнения орбиты

$$r_k = \frac{p}{1 + e \cos(\lambda_k - \omega)} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Пользуясь этим равенством при $k = 1, 2$ и затем при $k = 2, 3$, найдем

$$e = \frac{r_{k+1} - r_k}{r_k \cos(\lambda_k - \omega) - r_{k+1} \cos(\lambda_{k+1} - \omega)} \quad (k = 1, 2).$$

Из последних двух соотношений можно определить $\operatorname{tg} \omega$:

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{A_1 \cos \lambda_1 + A_2 \cos \lambda_2 + A_3 \cos \lambda_3}{A_1 \sin \lambda_1 + A_2 \sin \lambda_2 + A_3 \sin \lambda_3},$$

где $A_1 = r_1(r_2 - r_3)$, $A_2 = r_2(r_3 - r_1)$, $A_3 = r_3(r_1 - r_2)$. Зная ω , можно из приведенных формул найти e, p , а затем и a и r_{Π} :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad r_{\Pi} = \frac{p}{1 + e}.$$

Подставляя числовые данные в эти формулы, вычисляем

$$a = 124,9 \cdot 10^6 \text{ км}, \quad e = 0,727, \quad \omega = 89^{\circ}3.$$

7. По условию

$$r_1 = R_3(4i + 3j), \quad V_1 = \frac{1}{3}(3i + 4j + 12k).$$

Поэтому

$$r_1 = 5R_3, \quad V_1 = \frac{13}{3} \text{ км/сек},$$

$$\sigma = |r_1 \times V_1| = 20,138 R_3 = 1,283 \cdot 10^6 \text{ км}^2/\text{сек}.$$

С помощью формул (5.2.9) получим

$$p = 41\,290 \text{ км}, \quad e = 0,594, \\ a = 63\,800 \text{ км}, \quad n = 3,918 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}.$$

По формуле (5.2.8) находим

$$R = 0,59588 i - 0,79451 j + 0,11587 k,$$

так что

$$\sin \delta \mathcal{L} \sin i = 0,59588, \quad \cos \delta \mathcal{L} \sin i = 0,11587, \quad \cos i = 0,11587.$$

Отсюда $i = 83^{\circ} 20'$, $\delta \mathcal{L} = 36^{\circ} 50'$.

Из равенства

$$V_{1r} = \frac{\sigma e}{\rho} \sin v_1 = \frac{r_1 V_1}{r} = 1,6 \text{ км/сек}$$

следует, что

$$\sin v_1 = 0,867, \quad e \cos v_1 = \frac{\rho}{r_1} - 1 > 0.$$

Поэтому $v_1 = 60^\circ 07'$.

Так как в данном случае ясно, что $\beta = \frac{r_1}{r_2}$, то

$$\omega = 360^\circ - v_1 = 299^\circ 53'.$$

По формулам (5.2.12) — (5.2.13) получим

$$E_1 = 28^\circ 35', \quad t_1 - \tau = 55^m,$$

$$\tau = 1970, \text{ май, } 1, 11^h 05^m \text{ УТ.}$$

8. Местное звездное время в момент выхода спутника на кеплеровскую орбиту было в градусной мере $s = 178^\circ, 32'$.

Находим e и ρ по формулам

$$e^2 = \left(\frac{r_0 V_0^2}{K} - 1 \right)^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta, \quad \rho = \frac{r_0^2 V_0^2 \sin^2 \beta}{K},$$

где $r_0 = R_3 + H$. Получим $e = 0,14$, $\rho = 1,15R_3$.

Затем можем найти a по формуле $a = \rho / (1 - e^2) = 7480 \text{ км}$. Если бы спутник и раньше, до прохождения над пунктом P , двигался по той же орбите, то он прошел бы через восходящий узел δ и перигей Π орбиты. Обозначим подспутниковую точку для восходящего узла через C , а точку пересечения экватора с меридианом, проходящим через P , обозначим через B . В прямоугольном сферическом треугольнике

$$\begin{aligned} \angle BPC = \alpha = A - 180^\circ, \quad \angle BCP = i, \quad \sphericalangle BP = \varphi, \\ \sphericalangle CP = u, \quad \sphericalangle CB = \Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_C. \end{aligned}$$

По формулам сферической тригонометрии получим

$$\begin{aligned} \cos i = \cos \varphi \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \Delta\lambda = \sin \varphi \operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} \varphi \cos \alpha. \end{aligned}$$

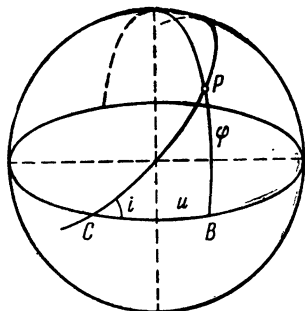


Рис. P.5.1.

Отсюда находим $i = 28^\circ$, $u = 133^\circ, 5'$, $\Delta\lambda = 137^\circ$.

Так как $\delta_L = s - \Delta\lambda$, то $\delta_L = 51^\circ, 3'$. Из уравнения $r_0 = \rho / (1 + e \cos v_0)$ вычисляем $v_0 = 18^\circ$. Поэтому $\omega = u - v_0 = 115^\circ, 5'$.

Зная v_0 , можем вычислить значение эксцентрической аномалии E_0 , а затем из уравнения Кеплера — время $t - \tau$ перелета от перигея до точки P . Получаем $t - \tau = 5^m$. Отсюда находим момент τ прохождения спутника через перигей.

9. $r_{\Pi} = R_3 + H = 6911 \text{ км}$, $a^3 = \frac{K_3 T^2}{4\pi^2} = 57 725 \cdot 10^7 \text{ км}^3$, откуда $a = 8326 \text{ км}$.

Пусть S' — конец активного участка траектории спутника, B' — точка, в которой спутник впервые после запуска прошел через плоскость экватора, S и B — проекции этих точек на поверхность Земли (имеем в виду шаровую

модель), A — точка пересечения меридиана, проходящего через S , с экватором. Обозначим дугу AB через c , дугу SB — через u . Тогда

$$\begin{aligned} \sin c &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} i = 0,56911, & c &= 34^\circ 41', \\ \sin u &= \frac{\sin \varphi}{\sin i} = 0,64087, & u &= 39^\circ 52', & \omega &= 180^\circ - u = 140^\circ 08'. \end{aligned}$$

Если бы и до прохождения через точку S' спутник двигался по той же кеплеровской орбите, то полет от восходящего узла занял бы время Δt , которое можно вычислить по следующей приближенной формуле (см. задачу 4.1.3):

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} \left(\omega - 2e \sin \omega + \frac{3}{4} e^2 \sin 2\omega \right) \approx 44^m 15^s.$$

Поэтому спутник прошел бы через восходящий узел орбиты 17 февраля 1959 г. в момент

$$15^h 55^m + 6^m - 44^m 15^s = 15^h 16^m 45^s.$$

Если учесть, что звездное время в гринвичскую полночь на 17 февраля составляло $9^h 44^m 54^s$ (см. *Астрономический Ежегодник*), то нетрудно вычислить δ_{\odot} :

$$\delta_{\odot} = 170^\circ 53' 30''.$$

10. Находим гелиоцентрические расстояния точек S_1 и S_2 :

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 1,3 \text{ а. е.}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = 0,5 \text{ а. е.}$$

Вычисляем затем угол $2f = v_2 - v_1$:

$$\cos 2f = \frac{(r_1, r_2)}{r_1 r_2} = -0,923, \quad 2f = 157^\circ 23',$$

$$R = \frac{[r_1, r_2]}{|[r_1, r_2]|} = 0,80i + 0,48j - 0,56k.$$

С другой стороны,

$$R = \sin i \sin \delta_{\odot} \cdot i - \sin i \cos \delta_{\odot} \cdot j + \cos i \cdot k,$$

так что $\sin i \sin \delta_{\odot} = 0,80$, $\sin i \cos \delta_{\odot} = -0,48$, $\cos i = -0,56$, откуда $i = 111^\circ 06'$, $\delta_{\odot} = 120^\circ 48'$. Найдём теперь v_1 . Из уравнения орбиты имеем

$$\cos \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{r_{\Pi}}{r_1}}, \quad \cos \frac{v_2}{2} = \sqrt{\frac{r_{\Pi}}{r_2}}, \quad v_2 = v_1 + 2f.$$

Отсюда следует

$$\sqrt{\frac{r_1}{r_{\Pi}}} \sin \frac{v_1}{2} = \operatorname{ctg} f - \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \operatorname{cosec} f = -1,445, \quad \sqrt{\frac{r_1}{r_{\Pi}}} \cos \frac{v_1}{2} = 1,$$

$$\frac{r_1}{r_{\Pi}} = 3,088, \quad r_{\Pi} = 0,421 \text{ а. е.}, \quad p = 2r_{\Pi} = 0,842 \text{ а. е.}, \quad v_1 = 110^\circ 38'.$$

С помощью формулы Баркера можно определить момент τ прохождения кометы через перигелий:

$$t_1 - \tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^3}{K_c}} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \right) = 55^d 5^h,$$

поэтому

$$\tau = 1964, \text{ июль, } 7, 22^h \text{ UT.}$$

Для нахождения ω можно воспользоваться формулами (5.2.39) — (5.2.41). Из них следует

$$r_1 \sin u = z_1 \operatorname{cosec} i, \quad r_1 \cos u = x_1 \cos \delta \varrho + y_1 \sin \delta \varrho.$$

Отсюда $u = 81^\circ 40'$, $\omega = u - v_1 = 331^\circ 02'$.

11. Пусть O — центр Земли, v_v ($v = 1, 2$) — истинная аномалия точки S_v , E_v — ее эксцентрическая аномалия.

Найдем длины векторов

$$r_v = \overline{OS}_v = x_v i + y_v j + z_v k.$$

Получаем

$$r_1 = 3,0, \quad r_2 = 3,045.$$

Векторы r_1 и r_2 составляют друг с другом угол $2f = v_2 - v_1$, так что

$$\cos 2f = \frac{(r_1, r_2)}{r_1 r_2} = 0,9553.$$

Векторы r_1 и r_2 служат для плоскости орбиты базисом (это значит, что любой вектор, лежащий в плоскости орбиты, является линейной комбинацией векторов r_1 и r_2). Подберем два ортогональных вектора, которые также служат базисом для плоскости орбиты. В качестве одного из них возьмем вектор r_1 , а другой будем искать в виде

$$r'_2 = r_2 - \mu r_1, \quad (*)$$

где μ — константа. Из условия $r'_2 \perp r_2$ следует

$$(r_1, r'_2) = 0, \quad (r_1, r_2) - \mu r_1^2 = 0,$$

$$\mu = \frac{(r_1, r_2)}{r_1^2} = 0,9696,$$

$$r'_2 = -0,3268i + 0,7448j + 0,3907k, \quad r'_2 = 0,9023.$$

Система векторов

$$\rho_1 = \frac{r_1}{r_1} = 0,9281i + 0,2760j + 0,3907k,$$

$$\rho_2 = \frac{r'_2}{r'_2} = -0,3622i + 0,8254j + 0,4323k$$

будет не только ортогональным базисом плоскости орбиты, но и «нормированным» базисом (это значит, что «норма» или длина каждого из этих векторов равна 1). Умножая (*) скалярно на r'_2 , найдем

$$\sin 2f = \frac{r'_2}{r_2} > 0$$

и тогда из выражения для $\cos 2f$ получим

$$2f = 17^\circ 13'.$$

Из уравнения орбиты имеем

$$e \cos v_1 = q_1, \quad e \cos v_2 = q_2, \quad (**)$$

где

$$q_1 = \frac{p}{r_1} - 1 = 0,5, \quad q_2 = \frac{p}{r_2} - 1 = 0,4778. \quad (***)$$

Из (**) и (***) находим

$$e \sin v_1 = q_1 \operatorname{ctg} 2f - q_2 \operatorname{cosec} 2f = 0.$$

С учетом последнего соотношения из (***) определяем e и v_1 :

$$e = 0,5, \quad v_1 = 0.$$

Зная p и e , вычисляем a по формуле $a = p/(1 - e^2) = 6,0$. Найдем теперь векторные элементы P и Q , учитывая, что

$$|P| = |Q| = 1, \quad (P, \hat{\rho}_1) = (Q, \hat{\rho}_2) = v_1, \quad (P, \hat{\rho}_2) = v_1 + 90^\circ, \quad (Q, \hat{\rho}_1) = v_1 - 90^\circ.$$

Подберем константы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ так, чтобы

$$P = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2, \quad Q = \beta_1 \rho_1 + \beta_2 \rho_2.$$

Получаем

$$P = \rho_1 \cos v_1 - \rho_2 \sin v_1 = \rho_1,$$

$$Q = \rho_1 \sin v_1 + \rho_2 \cos v_2 = \rho_2.$$

Кроме того, третий векторный элемент

$$R = [P, Q] = -0,08660i - 0,49239j + 0,86600k.$$

Для нахождения $\omega, j, \delta \mathcal{L}$ можно воспользоваться следующими формулами, которые нетрудно проверить:

$$R_x = \sin i \sin \delta \mathcal{L}, \quad R_y = -\sin i \cos \delta \mathcal{L}, \quad R_z = \cos i,$$

$$P_x = \sin i \sin \omega, \quad Q_x = \sin i \cos \omega.$$

Получаем

$$i = 30^\circ, \quad \delta \mathcal{L} = 350^\circ, \quad \omega = 30^\circ.$$

Момент τ прохождения спутника через перигей находим по формулам (5.2.12) — (5.2.13):

$$\operatorname{tg} \frac{E_1}{2} = 0, \quad E_1 = 0, \quad t_1 - \tau = 0.$$

Поэтому $\tau = t_1$.

$$12. a = 3R_3, \quad e = 0,1, \quad i = 30^\circ, \quad \delta \mathcal{L} = 80^\circ, \quad \omega = 60^\circ.$$

$$14. a = 1,143R_3, \quad e = 0,0376, \quad i = 55^\circ 18', \quad \omega = 29^\circ 54', \quad \delta \mathcal{L} = 42^\circ, \\ \tau = 16^{\text{h}}59^{\text{m}}\text{UT}.$$

$$15. a = 1,5R_3, \quad e = 0,2, \quad i = 45^\circ, \quad \delta \mathcal{L} = 45^\circ, \quad \omega = 45^\circ.$$

§ 3

1. Среднее движение спутника и его подспутниковой точки (на вращающейся Земле) равно $n = \sqrt{K/a^3}$, а скорость V подспутниковой точки равна Rn , где R — средний радиус Земли. В момент t_0 прохождения спутника над экватором (из южного полушария в северное) можно скорость подспутниковой точки разложить на две компоненты V_m и V_9 , из которых первая направлена по меридиану, а вторая — по экватору:

$$V_m = V \sin i, \quad V_9 = V \cos i.$$

Рассмотрим теперь движение подспутниковой точки на вращающейся Земле. Учтем, что каждая точка экватора вращается со скоростью $V_0 = \frac{2\pi R}{86 \cdot 164}$ км/сек. Поэтому скорость спутника относительно вращающейся Земли имеет такие компоненты (в момент t_0):

$$V'_9 = V_9 - V_0, \quad V'_m = V_m.$$

Угол γ между трассой и экватором в момент t_0 удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{V'_M}{V'_S} = \frac{V_M}{V_S - V_0}.$$

В нашем случае $a = 6685$ км, $V = 7,36$ км/сек,

$$V_S = V \cos 65^\circ = 3,10 \text{ км/сек}, \quad V_M = V \sin 65^\circ = 6,67 \text{ км/сек}, \\ V_0 = 0,464 \text{ км/сек}, \quad \operatorname{tg} \gamma = 6,67/2,64 = 2,53, \quad \gamma = 68^\circ 25'.$$

2. Можно воспользоваться формулами из решения предыдущей задачи. В данном случае

$$i = 90^\circ, \quad V = 7,50 \text{ км/сек}, \quad V_S = 0, \\ V_M = 7,50 \text{ км/сек}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -15,96, \quad \gamma = 93^\circ 40'.$$

3. $\lambda = \delta \int_0^t + \arcsin(\operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} t) - \frac{\omega T}{2\pi} \arcsin\left(\frac{\sin \varphi}{\sin i}\right)$, где ω — угловая скорость вращения Луны, а T — период обращения спутника.

Г Л А В А VI

§ 1

1. Возьмем прямоугольную систему координат с началом в центре сфероида и направим ось аппликат z вдоль оси вращения галактики. Придадим системе координат вращение с угловой скоростью n тела вокруг оси z . Принимая затем прямоугольные координаты точки x, y, z в этой системе за лагранжевы, составим кинетическую энергию T и силовую функцию U , положив массу движущейся точки равной единице. Выражение для силовой функции притяжения однородного эллипсоида вращения на внутреннюю точку получим с помощью формулы (2.3.6). Будем иметь

$$T = \frac{1}{2} [(\dot{x} - ny)^2 + (\dot{y} + nx)^2 + \dot{z}^2], \\ U = \frac{1}{2} [A(x^2 + y^2) + Bz^2].$$

Дифференциальные уравнения движения записываются следующим образом:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = Ax, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = Ay, \\ \ddot{z} = Bz.$$

Общее решение имеет вид

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 e^{\lambda_4 t}, \\ y = c_1 \eta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \eta_3 e^{\lambda_3 t} + c_4 \eta_4 e^{\lambda_4 t}, \\ z = c_5 \sin \sqrt{B}t + c_6 \cos \sqrt{B}t,$$

где c_i — постоянные интегрирования, λ_i — корни характеристического уравнения $(\lambda^2 - n^2 - A)^2 + 4n^2\lambda^2 = 0$, а величины η_i определяются из уравнений

$$(\lambda_i^2 - n^2 - A) \eta_i + 2n\lambda_i = 0.$$

2. Примем прямоугольные координаты лунного спутника x, y, z за лагранжеры:

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z,$$

и введем канонические импульсы

$$p_1 = \dot{x} - ny, \quad p_2 = \dot{y} + nx, \quad p_3 = \dot{z}.$$

Тогда гамильтониан задачи H запишется следующим образом:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + n(p_1 q_2 - p_2 q_1) - U - \frac{n^2}{2} (q_1^2 + q_2^2).$$

Каноническая система уравнений движения имеет вид

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Эта система обладает интегралом Якоби

$$H = \text{const.}$$

3. Дифференциальные уравнения движения спутника в сферических координатах (с полюсом в шаровой точке инерции) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r(\dot{\varphi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi) &= U'_r, \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \varphi) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) + \frac{1}{2} r^2 \dot{\lambda}^2 \sin 2\varphi &= U'_\varphi. \end{aligned}$$

Эта система допускает интеграл площадей

$$r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \varphi = c,$$

интеграл живых сил

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi = 2U + c_2$$

и интеграл

$$r^4 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi) = 2Kc \sin \varphi + c_3,$$

характеризующий изменение модуля момента количества движения спутника.

4. Пусть ρ, λ, z — цилиндрические координаты спутника Земли, причем ось аппликата направлена вдоль оси динамической симметрии, ρ — проекция геоцентрического радиуса-вектора на экваториальную плоскость, а λ — долгота (прямое восхождение). Дифференциальные уравнения движения спутника записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{\lambda}^2 &= U'_\rho, \\ \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\lambda}) &= 0, \\ \ddot{z} &= U'_z, \end{aligned}$$

где U — силовая функция земного тяготения.

С помощью интеграла площадей

$$\rho^2 \dot{\lambda} = c$$

понижаем порядок системы на две единицы. В результате приходим к уравнениям движения в форме Рауса

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= W'_\rho, \\ \ddot{z} &= W'_z, \end{aligned}$$

в которых измененная силовая функция W равна

$$W = U - \frac{c^2}{2\rho^2}.$$

$$5. T = \frac{2c^2 \cos(\varphi - \omega)}{\sin^4(\varphi - \omega)} [\dot{\omega}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \omega - 2\dot{\varphi}\dot{\omega} \sin \varphi \sin \omega \cos(\varphi - \omega)],$$

$$U = \frac{\sin(\varphi - \omega) (K \sin \omega + K' \sin \varphi)}{2c \sin \varphi \sin \omega \cos(\varphi - \omega)}.$$

6. В силу дополнительного условия, наложенного на идеальные координаты, выражения для скорости как в идеальных, так и в абсолютных координатах одинаковы:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2.$$

Поэтому будет сохраняться и вид функции Лагранжа, а стало быть, и дифференциальных уравнений движения.

7. Пусть в качестве лагранжевых координат приняты радиус-вектор r и полярный угол φ , т. е.

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi,$$

тогда

$$p_1 = \dot{q}_1, \quad p_2 = q_1^2 \dot{q}_2,$$

и уравнения Гамильтона запишутся в виде

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2),$$

причем функция Гамильтона будет равна

$$H = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} \right) - \frac{ce^{\alpha q_2}}{q_1^m}.$$

Частное решение, соответствующее спиральному движению, имеет вид

$$r = r_0 + \dot{r}_0 (t - t_0), \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{n}{a} \ln \left[\frac{a\dot{\varphi}_0}{n} (t - t_0) + 1 \right].$$

Для того чтобы удовлетворить уравнениям движения, постоянные \dot{r}_0 , φ_0 , a , n , $\dot{\varphi}_0$, c должны быть подчинены дополнительным условиям

$$nc = r_0^n + 2\dot{\varphi}_0^2 e^{-a\varphi_0}, \quad r_0 n \dot{\varphi}_0 = n \dot{r}_0.$$

8. Регуляризованные уравнения движения в параболических координатах запишутся в виде

$$\frac{d^2 p_1}{d\tau^2} = -2(p_1^2 + p_2^2) \frac{dp_2}{d\tau} + \frac{\partial W_1}{\partial p_1},$$

$$\frac{d^2 p_2}{d\tau^2} = 2(p_1^2 + p_2^2) \frac{dp_1}{d\tau} + \frac{\partial W_2}{\partial p_2},$$

где силовая функция W равна

$$W = \frac{3}{8} (p_2^2 - p_1^2)^2 (p_1^2 + p_2^2) + h (p_1^2 + p_2^2),$$

причем через h обозначена постоянная интеграла Якоби.

Эти уравнения допускают интеграл Якоби, который следует записать в виде

$$\left(\frac{dp_1}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dp_2}{d\tau} \right)^2 = 2W,$$

не включая в него дополнительную произвольную постоянную.

§ 2

1. Из решения задачи 6.1.1 следует, что силовая функция и кинетическая энергия звезды равны

$$U = \frac{1}{2} [A(x^2 + y^2) + Bz^2],$$

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Переходя к цилиндрическим координатам

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \sin \lambda, \quad z = z,$$

составим функцию Гамильтона

$$H = T - U = \frac{1}{2} (\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\lambda^2 + p_z^2 - A\rho^2 - Bz^2),$$

где p_ρ, p_λ, p_z — канонические импульсы.

Уравнение Гамильтона—Якоби запишется в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 - A\rho^2 - Bz^2 \right] = 0.$$

Его полный интеграл имеет следующую структуру:

$$W = -\alpha_1 t + \alpha_2 \lambda + W_1(\rho) + W_2(z),$$

где α_1 и α_2 — произвольные постоянные. Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, получим

$$-2\alpha_1 + W_1'^2 + \frac{\alpha_2^2}{\rho^2} + W_2'^2 - A\rho^2 - Bz^2 = 0,$$

откуда

$$W_1'^2 + \frac{\alpha_2^2}{\rho^2} - A\rho^2 - 2\alpha_1 = \alpha_3,$$

$$W_2'^2 - Bz^2 = -\alpha_3.$$

Тогда полный интеграл примет вид

$$W = -\alpha_1 t + \alpha_2 \lambda + \int \sqrt{\alpha_3 + 2\alpha_1 + A\rho^2 - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}} d\rho + \int \sqrt{Bz^2 - \alpha_3} dz.$$

Траектория и закон движения определяются согласно уравнениям (6.2.7) следующими соотношениями:

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{\alpha_3 + 2\alpha_1 + A\rho^2 - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} = t + \beta_1, \quad \lambda = \alpha_2 \int \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\alpha_3 + 2\alpha_1 + A\rho^2 - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}} + \beta_2,$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Bz^2 - \alpha_3}} = \beta_3.$$

2. Введем параболоидальные координаты

$$q_1 = \frac{1}{2} (r + x),$$

$$q_2 = \frac{1}{2} (r - x),$$

$$q_3 = \operatorname{arctg} \frac{y}{z},$$

где r — радиус-вектор притягиваемой точки с началом в центре силового поля. В этих координатах кинетическая энергия напишется следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \left[(q_1 + q_2) \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \right) + 4q_1 q_2 \dot{q}_3^2 \right],$$

а для силовой функции будем иметь

$$U = \frac{fm}{q_1 + q_2}.$$

Запишем уравнение Гамильтона—Якоби, выполнив предварительно преобразования, аналогичные тем, которые выполняются в решении задачи 1:

$$q_1 \left(\frac{\partial W}{\partial q_1} \right)^2 + q_2 \left(\frac{\partial W}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{q_1 + q_2}{4q_1 q_2} \alpha_3^2 - 2(q_1 + q_2) \alpha_1 - 2fm = 0,$$

где α_1, α_3 — произвольные постоянные. Его полный интеграл определяется формулой

$$W = -\alpha_1 t + \alpha_3 q_3 + \int \sqrt{2Q(q_1)} \frac{dq_1}{q_1} + \int \sqrt{2P(q_2)} \frac{dq_2}{q_2},$$

в которой

$$Q(q_1) = \alpha_1 q_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 q_1 - \frac{1}{8} \alpha_3^2,$$

$$P(q_2) = \alpha_1 q_2^2 - \frac{1}{2} (\alpha_2 - fm) q_2 - \frac{1}{8} \alpha_3^2.$$

Общий интеграл задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \int \frac{q_1 dq_1}{\sqrt{2Q(q_1)}} + \int \frac{q_2 dq_2}{\sqrt{2P(q_2)}} &= t - \beta_1, \\ \int \frac{dq_1}{\sqrt{2Q(q_1)}} - \int \frac{dq_2}{\sqrt{2P(q_2)}} &= -2\beta_2, \\ \int \frac{dq_1}{q_1 \sqrt{2Q(q_1)}} + \int \frac{dq_2}{q_2 \sqrt{2P(q_2)}} &= \frac{4}{\alpha_3} (q_3 + \beta_3). \end{aligned}$$

3. Функция Гамильтона в рассматриваемом случае определяется формулой

$$H = T_2 - T_0 - U,$$

откуда

$$H = \frac{\Phi}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{A_i} (p_i - b_i)^2 - c_i \right] - \frac{1}{\Phi} \sum_{i=1}^n U_i,$$

где через p_i обозначены канонические импульсы

$$p_i = \Phi (A_i \dot{q}_i + b_i).$$

Уравнение Гамильтона—Якоби напишется в виде

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - b_i \right)^2 - c_i \right] - 2 \sum_{i=1}^n U_i = 2h \sum_{i=1}^n \varphi_i,$$

где h —произвольная постоянная.

Это уравнение удовлетворяется, если положить

$$\frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} - b_i \right)^2 - c_i - 2U_i - 2h\varphi_i = \alpha_i$$

в предположении, что произвольные постоянные подчинены условию

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0.$$

Интегрируя каждое из последних уравнений отдельно, получим следующее выражение для полного интеграла уравнения Гамильтона—Якоби:

$$V = -\alpha_1 t + \sum_{i=1}^n \int \{ b_i + \sqrt{A_i [c_i + 2U_i + 2h\varphi_i + \alpha_i]} \} dq_i.$$

4. Уравнение Гамильтона—Якоби в полярных координатах запишется следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right] - U(r) = 0.$$

Здесь $U(r)$ —потенциал центрального поля сил.

Для полярной системы координат функции, входящие в формулировку теоремы Штеккеля, таковы:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= 1, & \varphi_{21} &= 0, \\ \varphi_{12} &= -\frac{1}{r^2}, & \varphi_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Определитель системы функций Δ равен

$$\Delta = \det |\varphi_{ij}| = 1.$$

Кроме того, имеем

$$A_1 = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{11}} = 1, \quad A_2 = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{21}} = \frac{1}{r^2}.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби запишется в виде

$$W = -\alpha_1 t + \sqrt{\alpha_2} \varphi + \int \sqrt{U(r) + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr.$$

Через α_i здесь обозначены постоянные интегрирования.

5. Уравнение Гамильтона—Якоби в сжатых сфероидальных координатах записывается в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2c^2} \left\{ \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] + \frac{1}{\text{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda} \right)^2 \right\} - U = 0,$$

где

$$J = \text{ch}^2 \psi - \cos^2 \vartheta.$$

В нашем случае функции φ_{ij} , входящие в условие теоремы Штеккеля, равны

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= c^2 \operatorname{th}^2 \psi, & \varphi_{21} &= c^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta, & \varphi_{31} &= 0, \\ \varphi_{12} &= -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \psi}, & \varphi_{22} &= \frac{1}{\cos^2 \vartheta}, & \varphi_{32} &= 0, \\ \varphi_{13} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^4 \psi}, & \varphi_{23} &= -\frac{1}{\cos^4 \vartheta}, & \varphi_{33} &= 1,\end{aligned}$$

а определитель

$$|\varphi_{ij}| = \Delta = \frac{c^2 J}{\cos^2 \vartheta \operatorname{ch}^2 \psi}.$$

Вычисляем коэффициенты

$$A_1 = \frac{\operatorname{ch}^2 \psi}{c^2 J}, \quad A_2 = \frac{\cos^2 \vartheta}{c^2 J}, \quad A_3 = \frac{1}{c^2 \operatorname{ch}^2 \psi \cos^2 \vartheta}.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби имеет следующую форму:

$$\begin{aligned}V &= -\alpha_1 t + \sqrt{\alpha_3} \lambda + \int \sqrt{2c^2 \Phi_1(\psi) + 2\alpha_1 c^2 \operatorname{sh}^2 \psi - \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\operatorname{ch}^2 \psi}} d\psi + \\ &+ \int \sqrt{-2c^2 \Phi_2(\vartheta) + 2c^2 \alpha_1 \sin^2 \psi + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\cos^2 \vartheta}} d\vartheta.\end{aligned}$$

6. Вычислим расстояния от мнимых фокусов сфероидальной системы координат, расположенных на мнимых расстояниях $\pm ci$ на оси аппликат, до произвольной точки пространства:

$$\begin{aligned}r_1 &= c(\operatorname{sh} \psi - i \sin \vartheta), \\ r_2 &= c(\operatorname{sh} \psi + i \sin \vartheta).\end{aligned}$$

Обозначая теперь расстояние до этой точки пространства от начала координат через r и разлагая выражения для r_1, r_2 по степеням малого отношения c/r в ряды, получим

$$\begin{aligned}r_1 &= r \left(1 - \frac{cz}{r^2} i + \dots \right), \\ r_2 &= r \left(1 + \frac{cz}{r^2} i + \dots \right).\end{aligned}$$

Теперь перейдем к пределу при $c \rightarrow 0$ в выражениях, принимая во внимание предыдущие разложения. Будем иметь

$$\lim_{c \rightarrow 0} c \operatorname{sh} \psi = r, \quad \lim_{c \rightarrow 0} \sin \vartheta = \sin \varphi,$$

где φ — полярный угол.

Найдем предельное значение силовой функции предыдущей задачи при $c=0$:

$$U = \frac{\Phi_1(r) - \Phi_2(\varphi)}{r^2}.$$

При $\Phi_2(\varphi) \equiv 0$ это выражение определяет потенциал центрального силового поля. Следовательно, в частном случае при $\Phi_1(r) \equiv \operatorname{const}$ будем иметь случай движения в центральном ньютоновском поле тяготения (задачу двух тел).

7. Согласно теореме Штеккеля будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \xi, & \varphi_{21} &= \eta, & \varphi_{31} &= 0, \\ \varphi_{12} &= -\frac{1}{\xi}, & \varphi_{22} &= \frac{1}{\eta}, & \varphi_{32} &= 0, \\ \varphi_{13} &= -\xi, & \varphi_{23} &= -\eta, & \varphi_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Определитель этой системы функций равен

$$\Delta = \det \|\varphi_{ij}\| = \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi\eta}.$$

Далее находим

$$A_1 = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad A_2 = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}, \quad A_3 = 1.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби возможно построить, если силовая функция имеет определенную структуру, а именно

$$U = \sum_{i=1}^n A_i U_i(q_i).$$

В нашем случае, как нетрудно проверить, это имеет место.

§ 3

1. Интеграл площадей можно записать в виде

$$hV = c,$$

где h — расстояние до центра звездной системы, V — модуль скорости. В полярной системе координат с полюсом в центре системы интеграл площадей приобретает форму

$$r^2 d\varphi = c dt.$$

В результате интегрирования получим

$$\pi ab = \frac{cT}{2},$$

где T — период обращения звезды вокруг центра звездной системы, a , b — полуоси эллипса.

Площадь параллелограмма, описанного около эллипса, равна

$$4ab = 2a \cdot 2b,$$

где ρ — полудиаметр, сопряженный с радиусом-вектором звезды. Заменяя произведение ab его выражением, полученным из интеграла площадей, будем иметь

$$V = \frac{2\pi\rho}{T}.$$

3. $\int \frac{dr}{\sqrt{\Phi(r)}} = t - t_0$, где $\Phi(r) = \sqrt{2c_2 + \frac{c - c_1^2}{r^2}}$, c — коэффициент пропорциональности в законе притяжения, а c_1 — постоянные интегрирования.

6. Пусть ρ — радиус кривизны траектории, h — расстояние от центра силы до касательной, а c_1 — некоторая постоянная. Тогда согласно условию задачи

$$\rho = \frac{c_1}{h^3}.$$

Кроме того, имеет место интеграл площадей

$$Vh = c,$$

в котором V — модуль скорости. Обозначая через F модуль силы, а через r — модуль радиуса-вектора с началом в центре сил, запишем уравнение движения в проекции на нормаль траектории:

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{Fh}{r}.$$

Исключая теперь из последнего уравнения радиус кривизны и скорость с помощью двух первых соотношений, находим

$$F = \frac{c^2}{c_1} r.$$

7. У к а з а н и е. Воспользуйтесь интегралом площадей и теоремой об изменении живой силы.

8. У к а з а н и е. Воспользуйтесь интегралом живых сил.

$$9. r = a - \frac{1}{2} vt^2.$$

11. При помощи второй формулы Бине находим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(1 - \frac{v}{c^2}\right)u = \frac{\mu}{c^2},$$

где c — постоянная площадей. Предполагая, что имеет место неравенство $v < c^2$, и вводя обозначение

$$m^2 = 1 - \frac{v}{c^2},$$

можно получить уравнение орбиты

$$u = \frac{\mu}{c^2 - v} + c \cos(m\varphi - \alpha),$$

где c и α — произвольные постоянные. Это уравнение можно считать уравнением конического сечения, вращающегося около фокуса с угловой скоростью, которая пропорциональна угловой скорости вращения радиуса-вектора точки $(1 - m)\dot{\varphi}$.

12. $2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v}{c^2}}\right)$, где c — постоянная площадей.

15. У к а з а н и е. Предварительно следует выполнить преобразование координат:

$$\xi = \frac{x}{at + b},$$

$$\mu = \frac{y}{at + b},$$

$$\zeta = \frac{z}{at + b}.$$

16. К первоначальной силе следует добавить центральную силу, обратно пропорциональную кубу расстояния до притягивающего центра.

У к а з а н и е. Обозначая через φ и φ' полярные углы для обеих орбит, согласно условию задачи будем иметь $\varphi' = \lambda\varphi$. Вторая точка описывает орбиту, вращающуюся относительно первой с угловой скоростью $(\lambda - 1)\dot{\varphi}$. Очевидно,

постоянные площадей в этих двух случаях связаны соотношением $c' = \lambda c$. Поэтому, пользуясь второй формулой Бине, находим искомую силу

$$F = \frac{c'^2}{r'^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi'^2} \left(\frac{1}{r'} \right) + \frac{1}{r'} \right].$$

§ 4

1. Дифференциальные уравнения движения точки в полярных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= U'_r, \\ \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя второе из уравнений, получаем интеграл площадей

$$r^2\dot{\varphi} = c.$$

Игнорируя циклическую координату — полярный угол φ , получим

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = U'_r,$$

или, вводя измененную силовую функцию

$$V = U - \frac{c^2}{2r^2},$$

будем иметь

$$\ddot{r} = V'_r.$$

Круговым движениям соответствует стационарное решение этого уравнения $r = r_0$, которое имеет место при значении постоянной площадей, удовлетворяющем уравнению

$$U'(r_0) - \frac{c^2}{r_0^3} = 0.$$

Как известно, равновесное решение будет устойчивым, если силовая функция в положении равновесия достигает изолированного максимума. В нашем случае это имеет место, если

$$U''_{rr} + \frac{3}{r} U'_r < 0.$$

2. Согласно второй формуле Бине (6.3.4) дифференциальное уравнение орбиты относительного движения в задаче двух тел записывается в виде

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{K}{c^2},$$

где r, φ — полярные координаты движущейся точки, c — постоянная площадей, K — произведение постоянной тяготения на сумму притягивающихся масс.

Эллиптическая орбита будет определяться уравнением

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

где p — фокальный параметр, а e — эксцентриситет.

Вводя для возмущения величины $u = 1/r$ обозначение

$$x = r - \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

получим следующее дифференциальное уравнение возмущенного движения:

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Рассматривая корни характеристического уравнения, убеждаемся, что все эллиптические движения орбитально устойчивы по отношению к радиусу-вектору.

3. Дифференциальные уравнения движения в цилиндрических координатах имеют вид

$$\ddot{\rho} = \frac{4\sigma^2}{\rho^3} + \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \dot{\sigma} = 0, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где σ — секторная скорость, а силовая функция зависит только от ρ и z . Уравнения движения допускают частное решение

$$\rho = \rho_0, \quad \dot{\rho} = 0, \quad \sigma = \sigma_0, \quad z = 0, \quad \dot{z} = 0,$$

которому соответствует круговое движение. Оно имеет место, если

$$U'_\rho < 0.$$

Нижний индекс нуль везде будет обозначать, что взято значение рассматриваемого выражения в точке $\rho = \rho_0, z = 0$.

Введем для возмущений обозначения

$$x_1 = \rho - \rho_0, \quad x_2 = \dot{\rho}, \quad x_3 = \sigma - \sigma_0, \quad x_4 = z, \quad x_5 = \dot{z}$$

и запишем дифференциальные уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 x_1 + \frac{4}{\rho_0^3} \sqrt{(-\rho U'_\rho)_0} x_3 + (U''_{\rho z})_0 x_4, \\ \dot{x}_3 &= 0, & \dot{x}_4 &= x_5, & \dot{x}_5 &= (U''_{zz})_0 x_4. \end{aligned}$$

Эти уравнения обладают двумя первыми интегралами:

$$V_1 = x_3,$$

$$V_2 = \frac{1}{2} [x_2^2 + 4(\sigma_0 + x_3)^2(\rho_0 + x_1)^{-2} + x_5^2] - U(\rho_0 + x_1, x_4) - 2\sigma_0^3 \rho_0^{-3} + U(\rho_0, 0).$$

Составим функцию Ляпунова в виде связки интегралов

$$V = \lambda V_1^2 - \frac{2}{\rho_0} \sqrt{(-\rho V'_\rho)_0} V_1 + V_2,$$

в которой λ — постоянное число.

Эта функция будет знакоопределенной в смысле Ляпунова, если выполнены условия

$$\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 < 0, \quad \left[U''_{zz} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right) - U''_{\rho z^2} \right]_0 > 0,$$

или

$$(U''_{zz})_0 < 0, \quad \left[U''_{zz} \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right) - U''_{\rho z^2} \right]_0 > 0.$$

Они будут не только достаточными условиями устойчивости, но и необходимыми, в чем можно убедиться, если рассмотреть характеристическое уравнение системы уравнений возмущенного движения в первом приближении

$$\kappa^4 - \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho + U''_{zz} \right)_0 \kappa^2 + \left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho - U''_{\rho z} \right)_0 = 0.$$

4. У к а з а н и е. Преобразуйте условия устойчивости круговых орбит, полученные в задаче 3, при помощи уравнения Пуассона (2.2.2), записанного в цилиндрических координатах.

5. Все круговые экваториальные орбиты устойчивы по отношению к ρ , $\dot{\rho}$, σ , z , \dot{z} .

У к а з а н и е. Условия устойчивости круговых орбит, полученные в задаче 3, предварительно упростите, принимая во внимание, что в нашем случае $(U''_{\rho z})_0 = 0$. Они будут иметь вид

$$\left(U''_{\rho\rho} + \frac{3}{\rho} U'_\rho \right)_0 < 0, \quad (U''_{zz})_0 < 0.$$

Затем проверьте справедливость этих неравенств для потенциала Паренано.

6. Движения звезд в рассматриваемой области будут устойчивы.

7. У к а з а н и е. Найдите минимум полной механической энергии при фиксированном значении постоянной площадей.

8. У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулами (2.3.6) — (2.3.9).

9. Потенциальная и кинетическая энергии космического аппарата в полярных координатах имеют соответственно вид

$$\Pi = - \left(\frac{Km}{r} + m\omega r \right), \quad T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

где K — гравитационный параметр центрального поля. Опуская общий множитель $m \neq 0$, запишем выражение для измененной потенциальной энергии

$$\Pi_* = - \frac{K}{r} - \omega r + \frac{c^2}{2r^2},$$

где c — постоянная циклического интеграла. Условие существования круговых движений дается уравнением

$$\frac{\partial \Pi_*}{\partial r} = \frac{1}{r^3} (Kr - \omega r^3 - c^2) = 0.$$

Согласно теореме Лагранжа положение равновесия, определяемое записанным выше уравнением, будет устойчиво, если измененная потенциальная энергия Π_* в этом положении имеет изолированный минимум, и неустойчиво при наличии изолированного максимума. Исключая в выражении для второй производной Π_* циклическую постоянную c с помощью условия $\partial \Pi_* / \partial r = 0$, будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Pi_*}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{K}{r^2} - 3\omega \right).$$

Так как $K/r^2 = g$ есть гравитационное ускорение на круговой орбите радиуса r , то при $\omega < g/3$ круговые орбиты устойчивы, а при $\omega > g/3$ — неустойчивы.

10. Поместим начало неподвижной цилиндрической системы координат ρ , φ , z в центр планеты, а ось z направим по оси вращения планеты в сторону действия реактивной тяги. Тогда кинетическая и потенциальная энергия спутника соответственно запишутся в виде

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \quad \Pi = -m\omega z - \frac{Km}{\sqrt{\rho^2 + z^2}},$$

где ω — модуль реактивного ускорения.

Опуская общий множитель $m \neq 0$, найдем измененную потенциальную энергию

$$\Pi_* = -\omega z - \frac{K}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{c^2}{2\rho^2},$$

где c — постоянная циклического интеграла. Условия существования круговых движений даются уравнениями

$$\frac{\partial \Pi_*}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_*}{\partial \rho} = 0.$$

Из первого уравнения, учитывая, что $z = r \sin \varphi$, найдем связь между расстоянием спутника до центра планеты r и его широтой φ :

$$r^2 = \frac{K}{\omega} \sin \varphi.$$

Из условия минимума измененной потенциальной энергии в положении равновесия позиционных координат получаем неравенства

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} > 0, \quad \left[\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} \right] > 0. \quad (*)$$

Вычисляя частные производные, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{K}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{K \rho}{r^3} \right) = \frac{K}{r^3} (1 - 3 \cos^2 \varphi), \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} &= \frac{K}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi), \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z} = -3 \frac{K}{r^3} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для частных производных в (*), приходим к неравенствам

$$1 - 3 \sin^2 \varphi > 0, \quad 1 - 9 \sin^2 \varphi > 0,$$

из которых остается одно:

$$1 - 9 \sin^2 \varphi > 0.$$

Таким образом, при $\sin \varphi < 1/\sqrt{3}$ круговые орбиты устойчивы. Так как в данном случае теорема Лагранжа обратима и при $\sin \varphi > 1/\sqrt{3}$ измененная потенциальная энергия в положении равновесия имеет изолированный максимум, то для этих широт круговые орбиты неустойчивы.

12. У к а з а н и е. Воспользовавшись соотношением $\rho = r \cos \varphi$, исключите r в уравнении круговой орбиты $r^2 = K/\omega \sin \varphi$, после чего найдите экстремальное значение $\rho = \rho(\varphi)$.

Силовое поле можно задать потенциалом

$$U = \frac{\mu}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \omega (z \cos \varphi - \rho \sin \varphi),$$

где ρ и z — цилиндрические координаты спутника.

13. В полярных координатах r, φ измененная потенциальная энергия равна

$$\Pi_* = -\frac{K_n}{r} + \frac{K_s}{2a^3} r^2 + \frac{c^2}{2r^2},$$

где c — постоянная циклического интеграла.

В положении равновесия, определяемом уравнением

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial r} = \frac{1}{r^3} \left(K_{\text{пр}} r + \frac{K_s}{a^3} r^4 - c^2 \right) = 0,$$

при всех r она имеет изолированный максимум, откуда на основании обращения теоремы Лагранжа делаем заключение, что круговые орбиты неустойчивы (см. также решение задачи 9).

14. Потенциальная энергия спутника равна

$$\Pi = - \sum_i \frac{K m_i}{r_i},$$

где K — гравитационная постоянная притягивающего центра, а r_i — расстояние i -й точки массы m_i от притягивающего центра. Обозначая через ρ_i расстояние i -й точки от центра масс C спутника, получим

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_c} \left(1 + \frac{\rho_i^2}{r^2} + 2 \frac{\rho_i}{r} \cos \varphi \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как отношение ρ_i/r_c мало, то разложим потенциальную энергию в ряд по степеням ρ_i/r_c , удерживая члены до второго порядка включительно. Будем иметь

$$\Pi = - \frac{K}{r_c} \sum_i m_i + \frac{K \cos \varphi}{r_c^2} \sum_i m_i \rho_i + \frac{K (1 - 3 \cos^2 \varphi)}{2 r_c^3} \sum_i m_i \rho_i^2 + \dots$$

Отбрасывая постоянную и замечая, что $\sum_i m_i \rho_i = 0$, получим

$$\Pi = \frac{K J_c (1 - 3 \cos^2 \varphi)}{2 r_c^3},$$

где J_c — момент инерции спутника относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В положении равновесия

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{3 K J_c}{2 r_c^3} \sin 2\varphi = 0,$$

откуда находим два значения угла

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi/2,$$

соответствующие двум положениям равновесия спутника. Положение равновесия будет устойчиво на основании теоремы Лагранжа, если Π в положении равновесия имеет изолированный минимум, т. е. при

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{3 K J_c}{r_c^3} \cos 2\varphi_{1,2} > 0.$$

Написанное неравенство выполняется при $\varphi = 0$. Π при $\varphi = \pi/2$ имеет изолированный максимум. На основании обращения теоремы Лагранжа, данного Ляпуновым, заключаем, что положение равновесия $\varphi = \pi/2$ неустойчиво.

При помощи теоремы Кенига вычислим кинетическую энергию спутника:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_c \left(\dot{\varphi} + \frac{V_c}{r_c} \right)^2,$$

где V_c — скорость центра масс спутника. Так как $V_c = \text{const}$, то колебания спутника вокруг центра масс описываются лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} J_c \left(\dot{\varphi} + \frac{V_c}{r_c} \right)^2 - \Pi.$$

С учетом полученного выражения для потенциальной энергии уравнение малых колебаний спутника запишется в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{3K}{r_c^3} \varphi = 0.$$

15. Все экваториальные круговые орбиты спутников Земли и Сатурна устойчивы по отношению к радиусу-вектору и радиальной скорости, аппликате и скорости ее изменения, секторной скорости.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формой условий устойчивости круговых орбит, полученных при решении задач 5. Потенциал тяготения возьмите в виде

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 + J_2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Здесь J_2 — коэффициент второй зональной гармоники, R_0 — экваториальный радиус планеты.

16. Задача о движении спутника трехосной планеты допускает четыре либрационных решения (положения относительного равновесия): двум из них соответствуют положения спутника на большой оси экваториального эллипса планеты, а двум другим — положения спутника на малой оси этого же эллипса. Точки либрации, расположенные на большой оси эллипса, неустойчивы, а две другие устойчивы в первом приближении.

У к а з а н и е. Свяжем жестко с вращающейся планетой барицентрическую прямоугольную систему координат $\xi\eta\zeta$, ось аппликат которой совместим с осью вращения, а две другие оси направим по главным центральным осям инерции. Обозначим координаты какой-либо точки либрации через a, b, c . Введем возмущения координат:

$$\xi = a + x, \quad \eta = b + y, \quad \zeta = c + z.$$

Тогда дифференциальные уравнения возмущенного движения (в первом приближении) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} x + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} y + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial c} z, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} x + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} y + \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial c} z, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial c} x + \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial c} y + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} z, \end{aligned}$$

где силовая функция определяется следующей формулой:

$$V = \frac{n^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{fm}{r} + \frac{f}{r^5} \left[(B + C - 2A) \xi^2 + (A + C - 2B) \eta^2 + (A + B - 2C) \zeta^2 \right].$$

Определяя координаты точек либрации и исследуя корни характеристического уравнения, можно установить необходимые условия устойчивости и неустойчивости рассматриваемых положений относительного равновесия.

17. Нулевое решение системы устойчиво при любых значениях коэффициентов b и c .

У к а з а н и е. Принять в качестве функции Ляпунова квадратичную форму $V = x^2 + y^2$.

18. Преобразуем дифференциальные уравнения к полярным координатам ($x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$). Будем иметь

$$\begin{aligned} \rho \dot{\rho} &= F \cos(\sigma t + \vartheta + \delta), \\ \rho^2 \dot{\vartheta} &= \rho^2 (b - c\rho^2) - F \sin(\sigma t + \vartheta + \delta). \end{aligned}$$

Эти уравнения допускают решение вида

$$\rho = K, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \sigma t - \delta,$$

которому в старых координатах соответствуют решения, приведенные в условии задачи. Величина K в этом решении должна удовлетворять уравнению

$$K^2 \sigma + K^2 (b - cK^2) - F = 0.$$

Полагая теперь

$$\rho = K + x_1, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \sigma t - \delta + x_2,$$

запишем дифференциальные уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{F}{K} x_2, \\ \dot{x}_2 &= 2 \left(\frac{F}{K^3} - cK \right) x_1. \end{aligned}$$

Составляя характеристическое уравнение для полученной системы

$$\lambda^2 + 2 \frac{F}{K} \left(\frac{F}{K^3} - cK \right) = 0,$$

находим необходимые условия устойчивости рассматриваемого решения по отношению к величинам ρ , ϑ :

$$F(F - cK^4) \geq 0.$$

Г Л А В А VII

§ 1

1. С помощью интеграла энергии исключите из формулы Лагранжа — Якоби в первом случае живую силу, а во втором — силовую функцию.

2. Допустим противное. Тогда найдется такое число R , что $|r_i| \leq R$ для всех $t \geq 0$. Отсюда следует, что для всех $t \leq MR^2$, где $M = \sum_{i=1}^n m_i$. Положим $I(0) = I_0$, $\dot{I}(0) = I_1$. Дважды интегрируя (в пределах от 0 до t) уравнение $\ddot{I} = 2U + 4h$ и учитывая что $U > 0$, получим

$$I(t) > I_0 + I_1 t + 2ht^2.$$

Поэтому $I(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. А это противоречит неравенству

$$I \leq MR^2.$$

3. Для решения задачи воспользуемся неравенством Коши — Буняковского:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^n m_i |r_i \times \dot{r}_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i V_i\right)^2 = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n (V \bar{m}_i r_i) (V \bar{m}_i V_i)\right]^2 \leq \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \sum_{i=1}^n m_i V_i^2 = 2IT. \end{aligned}$$

Остается учесть формулу Лагранжа — Якоби $\dot{I} = 2T + 2h$.

4. Не возможна. Действительно, по условию $U(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Из формулы Лагранжа — Якоби видно, что $\dot{I}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому при любом выборе числа $C > 0$, начиная с некоторого $t = t_0$, будем иметь $\dot{I}(t) > C$. Но тогда при $t > t_0$ $I(t) > C_0 + C_1 t + \frac{1}{2} C t^2$, где C_0 и C_1 — константы. Отсюда $I(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Между тем из условия следует, что $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

8. Пусть все $R_{ki} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_c$, где t_c — момент соударения. Тогда при $t \rightarrow t_c$ $U \rightarrow \infty$ и (см. формулу Лагранжа — Якоби) $\dot{I} \rightarrow \infty$. Поэтому $\dot{I} > 0$ на некотором отрезке $[t_0, t_c]$. Но тогда $\dot{I} \leq 0$ на $[t_0, t_c]$ *). Из неравенства Зундмана имеем

$$-\sigma^2 \frac{\dot{I}}{I} \leq h\dot{I} - I\ddot{I}.$$

Интегрируя по t , получим $\sigma^2 \ln I^{-1} \leq hI - \frac{1}{2} \dot{I}^2 + K < hI + K$, $K = \text{const}$, т. е.

$\sigma^2 \leq (hI + K) / \ln I^{-1}$. По условию при $t \rightarrow t_c$ имеем $I \rightarrow 0$ и, следовательно, $\sigma \rightarrow 0$. Но $\sigma = \text{const}$. Поэтому $\sigma = 0$.

9. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^n m_i (r_i - r_k)^2 = I + Mr_k^2,$$

где $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Умножая обе части этого равенства на m_k и суммируя по k от 1 до n , получим $2L = 2IM$, т. е. $L = IM$. Отсюда в силу формулы Лагранжа — Якоби

$$\ddot{L} = 2M(2T - U).$$

$$10. U \leq \frac{1}{\rho_{\min}(t)} \sum_{i,k=1}^n m_i m_k = \frac{1}{2\rho_{\min}(t)} \sum_{i,k=1}^n m_i m_k = \frac{M^2}{2\rho_{\min}(t)}.$$

*) Здесь использован факт из математического анализа: если на $[a, b]$ функция $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$f(t) \geq 0, \quad f'(t) \geq 0, \quad f(b) = 0,$$

то $f'(t) \leq 0$ на $[a, b]$. Доказательство следует из тождества

$$[f(t)f'(t)]' = [f'(t)]^2 + f(t)f''(t).$$

11. Согласно интегралу энергии $U = T - h \geq -h = |h|$. Поэтому (см. решение задачи 10)

$$\rho_{\min}(t) \leq \frac{M^2}{2|h|}.$$

12. Сначала покажем, что для любых $t_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такой момент t_1 , что $2U(t_1) + 4h > -\varepsilon$. Доказательство — от противного. Пусть для всех $t > t_0$ $2U(t) + 4h \leq -\varepsilon$, т. е. $\ddot{I}(t) \leq -\varepsilon$. Тогда при $t > t_0$

$$I(t) \leq A_0 + A_1(t - t_0) - \frac{\varepsilon}{2}(t - t_0)^2,$$

где A_0 и A_1 — константы.

Поэтому при достаточно больших t правая часть последнего неравенства отрицательна, а левая — положительна. Получилось противоречие. Из неравенства

$$2U(t_1) + 4h > -\varepsilon, \quad h < 0, \quad U(t_1) \leq \frac{M^2}{2\rho_{\min}(t_1)}$$

(см. решение задачи 10) следует, что

$$\rho_{\min}(t_1) < \frac{M^2}{4|h| - \varepsilon}.$$

13. Указание. Если в момент t расстояние p -й точки $CA_p = d$, то

$$I \geq CA_p^2 m_p = m_p d^2 \geq m d^2.$$

14. Указание. Пусть в момент t A_p и A_q — самые отдаленные между собой точки системы, т. е. $A_p A_q = \Delta$. Тогда $I = \frac{1}{2M} \sum_{i, k=1}^n m_i m_k \Delta_{ik}^2 \geq \frac{m^2}{2M} \Delta^2 = A \Delta^2$, где $m = \min_i m_i$, а $A = \frac{m^2}{2M}$.

15. а) $\ddot{I} = 2U + 4h \leq \frac{C}{\delta} + 4h$ ($C = \text{const}$), откуда при $t \geq t_0$ $I \leq Dt^2$, где D — некоторая константа. Так как $A \Delta^2 \leq I$ (см. предыдущую задачу), то получаем $A \Delta^2 \leq Dt^2$, т. е. $\Delta(t) \leq \beta t$, где β — константа.

б) Так как $\ddot{I} = 2U + 4h > 0$, то при $t > t_0 > 0$ $I \geq Et^2$, где E — некоторая положительная константа. Так как $B \Delta^2(t) \geq Et^2$ (см. предыдущую задачу), то получаем $B \Delta^2 \geq Et^2$, $\Delta(t) \geq \alpha t$, где α — некоторая положительная константа.

16. Указание. Из формулы Лагранжа — Якоби $\ddot{I} = 2(T + h)$ следует $t^{-1} \dot{I} = t^{-1} \int_0^t T(\tau) d\tau + h + \dot{I}(0) t^{-1}$. Поэтому $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \dot{I} = 0$. Пусть ε — произвольное

положительное число. Тогда при достаточно больших t $\dot{I}(t) < \varepsilon t$, $I \leq \frac{\varepsilon t^2}{2} + At + B$, т. е. $t^{-2} I(t) < \varepsilon$. А это значит, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-2} I(t) = 0.$$

§ 2

1. Введем селеноцентрическую систему прямоугольных координат x, y, z , за основную плоскость которой примем плоскость лунного экватора. Систему координат жестко свяжем с Луной. Для простоты будем считать, что плоскость лунного экватора совпадает с плоскостью геоцентрической орбиты Луны, а угловая скорость n ее вращения постоянна и равна угловой скорости ее обращения вокруг Земли. Дифференциальные уравнения движения лунного спутника в этой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= U'_x + V'_x, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= U'_y + V'_y, \\ \ddot{z} &= U'_z + V'_z,\end{aligned}$$

где U и V — потенциалы тяготения Земли и Луны:

$$U = \frac{f m_1}{r_1} + \frac{f}{m_1 r_1^5} [(B+C-2A)x^2 + (A+C-2B)y^2 + (A+B-2C)z^2],$$

$$V = \frac{f m_2}{r_2}.$$

Здесь m_1, m_2 — соответственно массы Луны и Земли, r_1 — селеноцентрическое расстояние спутника, r_2 — геоцентрическое расстояние спутника, A, B, C — главные центральные моменты инерции Луны.

2. Большим селеноцентрическим ускорением будет обладать спутник S_2 .

4. Обозначим через D_S модуль возмущающей силы от Солнца, а через D_E — модуль возмущающей силы от Земли. Пусть R — гелиоцентрическое расстояние Земли, ρ — гелиоцентрическое расстояние Луны, а r — расстояние от Луны до Земли, m_S — масса Солнца, m_E — масса Земли. Тогда

$$\frac{D_S}{D_E} = \frac{m_S}{m_E} \left(\frac{r}{\rho}\right)^3 \frac{R+\rho}{R+r} = 0,0114.$$

Последние искомые отношения соответственно равны

$$\frac{r^2 (R+\rho)}{R^2} = 0,005, \quad \frac{m_S}{m_E} \frac{r^3 (R+\rho)}{R^2 \rho^2} = 0,011.$$

$$5. \quad \ddot{r}_i - r_i (\dot{\varphi}_i^2 + \dot{\lambda}_i^2 \cos^2 \varphi_i) = \frac{\partial U_i}{\partial r_i},$$

$$\frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\varphi}_i) + r_i^2 \dot{\lambda}_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i = \frac{\partial U_i}{\partial \varphi_i},$$

$$\frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\lambda}_i \cos^2 \varphi_i) = \frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i}$$

$$(i=1, 2, \dots, n-1),$$

$$U_i = \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} + f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i \cos \gamma_{ij}}{r_j^2} \right), \quad \Delta_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \gamma_{ij},$$

$$\cos \gamma_{ij} = \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \cos \varphi_i \cos \varphi_j \cos (\lambda_i - \lambda_j),$$

m_0 — масса точки, находящейся в начале координат.

7. $\int_{i=1}^{n-1} \mu_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = \text{const.}$ Остальные интегралы площадей получаются циклической перестановкой букв x_i, y_i, z_i .

8. $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Здесь q_1, q_2 — координаты массы m_1 , q_3, q_4 — координаты массы m_2 , q_5, q_6 — координаты массы m_3 , а p_i — соответствующие канонические импульсы. Гамильтониан H равен

$$H = \frac{1}{2m_1} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2m_2} (p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{2m_3} (p_5^2 + p_6^2) - \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2}} - \frac{m_2 m_3}{\sqrt{(q_3 - q_5)^2 + (q_4 - q_6)^2}} - \frac{m_1 m_3}{\sqrt{(q_1 - q_5)^2 + (q_2 - q_6)^2}}.$$

9. $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$),

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right) (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) (p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{m_3} (p_1 p_3 + p_2 p_4) - \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2}} - \frac{m_2 m_3}{\sqrt{q_3^2 + q_4^2}} - \frac{m_1 m_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

10. $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Делаем замену независимой переменной

$$dt = J(q_1, q_2, \dots, q_n) d\tau,$$

$$\frac{dq_i}{d\tau} = J \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -J \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Но первая система допускает обобщенный интеграл живых сил:

$$H = h.$$

Принимая это во внимание, получим

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $K = J(H - h)$.

§ 3

2. $1/\sqrt[3]{3}$.

3. $r_1 = 0,84923$, $r_2 = 1,51220$, $r_3 = 0,66297$, где r_1, r_2, r_3 — расстояния масс m_1, m_2 и m_3 соответственно от центра инерции системы.

4. У к а з а н и е. Воспользуйтесь соотношением (7.3.7).

5. У к а з а н и е. Воспользуйтесь соотношением (7.3.11).

7. Выберем сумму $m_1 + m_2 + m_3$ за единицу массы, а длину стороны равностороннего треугольника за единицу длины. Проведем из геометрического центра треугольника в его вершины радиусы-векторы r_1, r_2, r_3 . Обозначая через r_c радиус-вектор центра масс системы трех тел, будем иметь

$$r_c = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3.$$

Учитывая, что теперь условие устойчивости записывается в виде

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 > \frac{1}{27},$$

а также что

$$r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = \frac{1}{3}, \quad r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot r_3 = r_2 \cdot r_3 = -\frac{1}{6},$$

на границе области устойчивости получим

$$r_c^2 = \sum_{i=1}^3 m_i^2 r_i^2 + 2(m_1 m_2 r_1 \cdot r_2 + m_1 m_3 r_1 \cdot r_3 + m_2 m_3 r_2 \cdot r_3) = \\ = \frac{1}{3} [(m_1 + m_2 + m_3)^2 - 2(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)] - \frac{1}{3} (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) = \frac{8}{27}.$$

Таким образом, границей области устойчивости является окружность, центр которой совпадает с геометрическим центром треугольника $m_1 m_2 m_3$, а радиус r_c составляет $0,943r$, где $r = 1/\sqrt{3}$ — расстояние между центром треугольника и его вершинами. Заданное условие устойчивости выполняется, когда центр инерции трех масс m_1, m_2, m_3 лежит вне указанной окружности.

8. Центр масс трех тел должен располагаться вне окружности, центр которой совпадает с геометрическим центром равностороннего треугольника $m_1 m_2 m_3$, а радиус r_c является функцией показателя n :

$$r_c = a \sqrt{\frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{n+3}{n-1} \right)^2 \right]},$$

где a — сторона равностороннего треугольника $m_1 m_2 m_3$. При $n \rightarrow -1$ область устойчивости расширяется, занимая всю площадь треугольника $m_1 m_2 m_3$ при $n = -1$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь методом доказательства, приведенным в предыдущей задаче.

§ 4

1. У к а з а н и е. Воспользуйтесь критерием Тиссерана (7.4.5).

$$2. i_2 = \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos i_1 \right),$$

где i_2 — новое значение наклонности, а i_1 — старое.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь критерием Тиссерана (7.4.5).

4. Из интеграла Якоби (7.4.4), полагая $z = 0$, получаем уравнение кривой нулевой скорости

$$\frac{n^2}{2} (x^2 + y^2) + U + h = 0.$$

Используя данные начальные условия, с помощью интеграла Якоби находим численное значение постоянной h .

Область возможности движения будет представлять замкнутый овал, содержащий внутри себя Землю.

5. Первые два из уравнений (7.4.1) тождественно удовлетворяются при $x = y = 0$, если $m_1 = m_2 = m$, поскольку одна из коллинеарных точек либрации совпадает с началом координат, расположенным в центре инерции притягивающих масс. Третье из уравнений движения будет иметь вид

$$\ddot{z} = - \frac{2fmz}{V(z^2 + a^2)^3},$$

где a — половина расстояния между притягивающими массами.

Из этого уравнения интегрированием получаем

$$\dot{z}^2 = \frac{4fm}{V(z^2 + a^2)} + h,$$

где h — произвольная постоянная.

Разделяя переменные в этом соотношении и интегрируя, получим

$$\int \frac{\sqrt{z^2 + a^2} dz}{\sqrt{4fm + h\sqrt{z^2 + a^2}}} = t - t_0.$$

Сделаем подстановку

$$\xi^2 = z^2 + a^2.$$

Тогда предыдущая квадратура преобразуется к виду

$$\int \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi(4fm + h\xi)(\xi^2 - a^2)}} = t - t_0,$$

т. е. задача свелась к обращению эллиптического интеграла.

6. Устойчивость движения по Хиллу, т. е. движение тела в ограниченной части пространства, можно установить по анализу поверхности нулевой скорости (см. задачу 4), а вид последней зависит от численного значения постоянной Якоби. Эта поверхность будет замкнутой, если постоянная Якоби не превосходит своего значения для точки либрации L_2 . Кроме того, требуется, чтобы перигелийное расстояние исследуемой точки было бы меньше гелиоцентрического расстояния до точки либрации L_2 . Вычисляя по данным элементам значение постоянной Якоби, находим $-857,7 \cdot 10^{-7}$. Но значение постоянной Якоби для точки либрации L_2 равно $-864,62 \cdot 10^{-7}$. Сопоставляя приведенные значения постоянной Якоби, обнаруживаем, что движение малой планеты Гильды будет неустойчивым в смысле Хилла.

7. Движение малой планеты Ева устойчиво по Хиллу.

У к а з а н и е. См. объяснения к предыдущей задаче.

8. Треугольные точки либрации в системе «Земля — Луна» в первом приближении устойчивы.

У к а з а н и е. Условие устойчивости треугольных точек либрации для ограниченной круговой задачи трех тел можно получить из соответствующих условий (7.3.12) для неограниченной задачи, если в них перейти к пределу, устремляя одну из масс к нулю:

$$(m_1 + m_2)^2 > 27m_1m_2.$$

9. Геоцентрические расстояния коллинеарных точек либрации: для L_1 — 326 тыс. км, для L_2 — 448 тыс. км, для L_3 — 382 тыс. км.

10. Гелиоцентрические расстояния точек либрации для системы «Земля — Солнце»: для L_1 — 0,9899 а. е., для L_2 — 1,0101 а. е., для L_3 — $(1 - 0,00000178)$ а. е.

11. Приблизительно $15'$.

12. Выберем в качестве единицы массы сумму масс $m_1 + m_2$. Тогда заданное неравенство запишется в виде

$$27\mu_1\mu_2 > 1,$$

где $\mu_1 = m_1/(m_1 + m_2)$ и $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$ — безразмерные массы соответствующих точек. Учитывая еще равенство $\mu_1 + \mu_2 = 1$, заключаем, что на границе области устойчивости μ_1 и μ_2 должны быть корнями уравнения

$$1 - 27\mu(1 - \mu) = 0,$$

откуда находим

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{23}{27}} \right).$$

Полагая для определенности $\mu_1 > \mu_2$ и помещая начало координат в точку с массой m_1 , получим

$$r_c = \mu_2 r_{12},$$

где r_{12} — расстояние между точками m_1 и m_2 .

Чтобы выполнялось исходное неравенство, центр масс должен располагаться на прямой $m_1 m_2$ между массой μ_1 и точкой, отстоящей от указанной массы на расстоянии, составляющем $0,078 r_{12}$.

§ 5

$$1. \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}, \quad \frac{dp_\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu},$$

$$H = T - U = \frac{1}{2c^2(\lambda^2 - \mu^2)} [(\lambda^2 - 1)p_\lambda^2 + (1 - \mu^2)p_\mu^2] - \frac{f}{c^2(\lambda^2 - \mu^2)} [(m_1 + m_2)\lambda - (m_1 - m_2)\mu].$$

В приведенных соотношениях m_1, m_2 — массы притягивающих центров, p_λ, p_μ — канонические импульсы, соответствующие лагранжевым координатам λ и μ .

2. Область возможного движения при достаточно больших по модулю отрицательных значениях полной механической энергии будет ограничена эллипсом $\lambda = \text{const}$ и гиперболой $\mu = \text{const}$, общие фокусы которых находятся в притягивающих центрах (область возможности движения заштрихована на рис. P.7.1.).

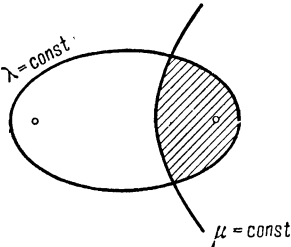


Рис. P.7.1.

Указание. Воспользуйтесь интегралами (7.5.12) и (7.5.13).

5. Луна является спутником Солнца, а Фобос — спутником Марса.

Указание. Рассмотрите области возможности движения.

6. Обозначим через F_k ($k = 1, 2$) силу тяготения массы m к притягивающему центру m_k . Выберем какую-либо точку O в качестве начала координат. Пусть масса m , находящаяся в точке P на эллипсе Γ , под действием силы F_1 сместилась вдоль эллипса на dr .

Тогда

$$d(mV_1^2) = 2F_1 \cdot dr.$$

Аналогично, если под действием силы тяготения F_2 к массе m_2 материальная точка m совершила такое же смещение dr , то

$$d(mV_2^2) = 2F_2 \cdot dr.$$

Пусть теперь на массу m действуют обе силы. Покажем, что при выполнении условий, указанных в задаче, точка m будет перемещаться по тому же эллипсу Γ .

Допустим противное. Тогда можно приложить (в плоскости, содержащей линию Γ) дополнительную силу N , направленную по нормали к эллипсу Γ так, чтобы под действием силы $F = F_1 + F_2 + N$ масса m уже описывала эллипс Γ . Обозначив скорость точки m через V и рассуждая так же, как выше, получим

$$d(mV^2) = 2(F_1 \cdot dr + F_2 \cdot \bar{dr}),$$

ибо $N \perp \bar{dr}$, и поэтому $N \cdot \bar{dr} = 0$.

Из приведенных соотношений следует, что

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + C.$$

Но так как в вершине эллипса имеем $V_0^2 = V_{10}^2 + V_{20}^2$, то $C = 0$ и $V^2 = V_1^2 + V_2^2$.

Покажем, что $N=0$. Для этого в каждой точке P кривой Γ найдем проекции F_{1n} , F_{2n} , F_n сил F_1 , F_2 , F на нормали к кривой. Обозначив через ρ радиус кривизны эллипса Γ в точке P , имеем

$$\frac{mV_1^2}{\rho} = F_{1n}, \quad \frac{mV_2^2}{\rho} = F_{2n}, \quad \frac{mV^2}{\rho} = F_n = F_{1n} + F_{2n} + N.$$

Но $V^2 = V_1^2 + V_2^2$. Поэтому из полученных соотношений следует $N=0$.

7. Рассуждая как в предыдущей задаче, получим соотношения

$$d(m_k V_k^2) = 2F_k \cdot dr \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Прилагая в случае необходимости дополнительную силу N , направленную по главной нормали к кривой, покажем, что

$$d(MV^2) = 2(a_1 F_1 + \dots + a_n F_n) \cdot dr = d(a_1 m_1 V_1^2 + \dots + a_n m_n V_n^2).$$

Отсюда и из соотношения

$$MV_0^2 = a_1 m_1 V_{10}^2 + \dots + a_n m_n V_{n0}^2$$

следует, что в любой точке кривой Γ

$$MV^2 = a_1 m_1 V_1^2 + \dots + a_n m_n V_n^2. \quad (*)$$

Проектируя все силы F_k и $a_1 F_1 + \dots + a_n F_n + N$ на главную нормаль к кривой Γ , имеем

$$\frac{m_k V_k^2}{\rho} = F_{kv}, \quad \frac{MV^2}{\rho} = a_1 F_{1v} + \dots + a_n F_{nv} + N. \quad (**)$$

Отсюда заключаем, что $N=0$.

Обратно, из соотношения

$$F = a_1 F_1 + \dots + a_n F_n$$

следует, что

$$F_v = a_1 F_{1v} + \dots + a_n F_{nv}.$$

Пользуясь соотношениями (*) и (**) (при $N=0$) получим, что (*) верно вдоль Γ .

8. Ясно от противного: если бы движение было возможно, то в силу теоремы Бонне—Егорова в каждой точке кривой (в том числе и в точке A) выполнялось бы условие

$$a_1 m_1 V_1^2 + \dots + a_n m_n V_n^2 > 0.$$

9. Выберем единицу длины и времени так, чтобы $AB=1$ и $f=1$ (f — постоянная тяготения). Рассмотрим движение точки P единичной массы под действием двух сил: силы F_β , притягивающей точку P к центру B и имеющей величину β/r_β^2 ($PB=r_\beta$), и силы F_α , отталкивающей точку P от центра A и имеющей величину α/r_α^2 ($PA=r_\alpha$). Тогда движение точки P под действием суммарной силы притяжения F к двум массам α и β , помещенным в точках A и B , определяется формулой

$$F = F_\beta - F_\alpha.$$

Изберем какую-либо гиперболу Γ с фокусами B и A и выясним, возможно ли движение по каждой ее ветви. Пусть d —расстояние фокуса B от асимптоты, γ —угол наклона асимптоты к оси AB , V_α и V_β —скорости точки P , получаемые ею соответственно в полях сил F_α и F_β , C —вершина гиперболы. Ясно, что

$$2d = \sin \gamma, \quad r_{\alpha C} = \frac{1}{2}(1 + \cos \gamma), \quad r_{\beta C} = \frac{1}{2}(1 - \cos \gamma).$$

Из интеграла энергии и интеграла площадей имеем

$$V_{\alpha C}^2 = -\frac{\alpha}{r_{\alpha C}} + V_{\alpha\infty}^2, \quad V_{\alpha C} r_{\alpha C} = dV_{\alpha\infty}.$$

Поэтому

$$V_{\alpha\infty}^2 = 2(1 - \beta) \sec \gamma.$$

Аналогично

$$V_{\beta\infty}^2 = 2\beta \sec \gamma, \quad V_{\infty}^2 = V_{\beta\infty}^2 - V_{\alpha\infty}^2 = (2\beta - 1) \sec \gamma.$$

Отсюда видно, что движение из бесконечности невозможно ($V_{\infty}^2 < 0$) по ветви, охватывающей меньшую массу (ибо $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\beta < \frac{1}{2}$).

Пусть T — кинетическая энергия точки, движущейся по гиперболе Γ под действием силы F . Тогда

$$T = \frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{2} (V_{\beta}^2 - V_{\alpha}^2) = \frac{\beta}{r_{\beta}} + \frac{1 - \beta}{r_{\alpha}} + \frac{2\beta - 1}{\cos \gamma}. \quad (*)$$

При перемещении точки вдоль гиперболы энергия T будет меняться и достигнет своего максимума в вершине C . Получим

$$T_C = \frac{1}{2} V_C^2 = \frac{2\beta(1 + \cos^2 \gamma) - (1 - \cos \gamma)^2}{\cos \gamma \sin^2 \gamma}$$

и при $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ $T_C \geq 0$, если

$$(1 - \cos \gamma)^2 \leq 2\beta(1 + \cos^2 \gamma). \quad (**)$$

Пусть γ — такой угол, для которого выполняется условие (*), причем в (**) имеет место строгое неравенство.

На границе области, где возможно движение, лежат точки, для которых $T = 0$ и $r_{\alpha} = r_{\beta} + \cos \gamma$. Отсюда можно найти $r_{\beta} = \frac{V_{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \cos \gamma$,

$r_{\alpha} = \frac{V_{\alpha}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} \cos \gamma$. Поэтому $r_{\alpha}/r_{\beta} = \sqrt{\alpha/\beta} = \lambda > 1$, где λ — константа, не

зависящая от γ . Но геометрическим местом точек плоскости, для которых отношение расстояний от данных точек A и B постоянно и больше 1, есть некоторая окружность, содержащая внутри себя точку B («окружность Аполлония»). Таким образом, под действием двух притягивающих центров движение возможно не по всей ветви гиперболы Γ , охватывающей точку B , а лишь по таким ее участкам, которые расположены внутри некоторой окружности.

10. Это следует из теоремы Бонне — Егорова. Аналитическое существование решений $v = \text{const}$ вытекает из уравнений (7.5.10).

12. Все возможные эллиптические орбиты устойчивы по отношению к большой полуоси и эксцентриситету орбиты.

У к а з а н и е. Большая полуось a и эксцентриситет e орбиты связаны с переменной v соотношениями

$$a = c \operatorname{ch} v, \quad e = \frac{1}{\operatorname{ch} v}.$$

Отсюда видно, что устойчивость орбиты по отношению к большой полуоси и эксцентриситету следует из устойчивости по отношению к величине v .

Устойчивость эллиптических орбит по отношению к v можно исследовать при помощи дифференциального уравнения (7.5.10) относительно v , а в качестве функции Ляпунова взять первый интеграл (7.5.13). При этом постоянную A следует положить равной нулю.

§ 6

1. Направляя ось Ox в сторону Солнца, для силовой функции солнечного притяжения получим

$$U = fM [(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{-\frac{1}{2}},$$

где M — масса Солнца, a — большая полуось земной орбиты, или

$$U = \frac{fM}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k P_k\left(\frac{x}{a}\right),$$

где $P_k\left(\frac{x}{a}\right)$ — полином Лежандра. Ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получим

$$U = wx, \quad \text{где} \quad w = \frac{fM}{a^2}.$$

Отношение w/g равно

$$\frac{w}{g} = \frac{M}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \approx 0,148.$$

2. 1) Параболоид вращения с осью вращения, совпадающей с осью Ox , вершина которого смещена вдоль оси Ox на величину $x = q_1 > 0$.

2) Параболоид вращения с осью вращения, совпадающей с осью Ox , вершина которого смещена вдоль оси Ox на величину $x = -q_2 < 0$.

3. Из общего решения предельной задачи двух неподвижных центров следует, что

$$\frac{dq_1}{d\tau} = \sqrt{2Q_1(q_1)}, \quad \frac{dq_2}{d\tau} = \sqrt{2Q_2(q_2)}.$$

Так как q_1 , q_2 и τ могут принимать лишь вещественные значения, то во все время движения должны выполняться неравенства $Q_1 \geq 0$, $Q_2 \geq 0$. Поскольку полная энергия точки положительна ($\alpha_1 > 0$), то, полагая $\alpha_3 \neq 0$ и обозначая корни многочлена $Q_1(q_1)$ через α , β , γ , на основании теоремы Виета будем иметь неравенства

$$\alpha\beta\gamma = \frac{\alpha_3^2}{8} > 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = -\alpha_1 < 0.$$

Учитывая еще, что $Q_1(0) = -\frac{\alpha_3^2}{8}$, $Q_1(+\infty) = +\infty$, $Q_1(-\infty) = -\infty$, заключаем, что многочлен $Q_1(q_1)$ имеет единственный положительный корень, причем если $\gamma > 0$, то $Q_1 \geq 0$ только при $\gamma \leq q_1 < +\infty$, т. е. движение точки может происходить во всей части пространства, лежащей вне параболоида $q_1 = \gamma$.

На основании выписанных неравенств заключаем, что и при $\alpha_1 < 0$ многочлен Q_1 опять всегда имеет один положительный корень, причем если $\gamma > 0$, то $Q(q_1) > 0$ при $\gamma \leq q_1 < +\infty$, т. е. движение и в этом случае инфинитно.

4. При $\alpha_3 = 0$ из циклического интеграла предельной задачи двух неподвижных центров выводим

$$\frac{dq_3}{dt} = 0, \quad q_3 = \operatorname{arctg} \frac{y}{z} = \operatorname{const},$$

т. е. точка движется в неизменной плоскости, проходящей через ось Ox . Так как при $\alpha_3 = 0$ оба многочлена Q_1 и Q_2 имеют по нулевому корню, то общее решение задачи примет вид

$$\tau - \tau_1 = \int \frac{dq_1}{\sqrt{2q_1 \left(\omega q_1^2 + \alpha_1 q_1 - \frac{fm_1 - \alpha_2}{2} \right)}},$$

$$\tau - \tau_2 = \int \frac{dq_2}{\sqrt{2q_2 \left(-\omega q_2^2 + \alpha_1 q_2 + \frac{fm_1 + \alpha_2}{2} \right)}}.$$

5. Используя общее решение предельной задачи двух неподвижных центров и переходя от регуляризирующего времени τ снова к t , получим уравнения

$$(q_1 + q_2) \frac{dq_1}{dt} = \sqrt{2Q_1(q_1)}, \quad (q_1 + q_2) \frac{dq_2}{dt} = \sqrt{2Q_2(q_2)}.$$

Возводя каждое из уравнений в квадрат и вычитая затем почленно одно из другого, найдем

$$\alpha_2 = (q_1 + q_2) (\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2) - \left(2\alpha_1 + \frac{fm_1}{q_1 + q_2} \right) (q_1 - q_2) - 2\omega \frac{q_1^3 + q_2^3}{q_1 + q_2}.$$

Переходя к декартовым координатам по формулам

$$r = q_1 + q_2, \quad x = q_1 - q_2$$

и учитывая, что полная энергия точки равна

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \left(\frac{fm_1}{r} + \omega x \right),$$

получим

$$\alpha_2 = x \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \frac{fm_1}{r} \right] - r \dot{x} \dot{x} + \frac{\omega}{2} (y^2 + z^2).$$

Так как на круговой орбите $V^2 = fm_1/r$ и $\dot{r} = 0$, то

$$(\alpha_2)_{\text{кр}} = \frac{\omega}{2} (y^2 + z^2).$$

6. Разрешая соотношения, связывающие параболоидальные и декартовы координаты относительно x, y, z , получим

$$x = \frac{1}{2} (q_1^2 - q_2^2), \quad y = q_1 q_2 \cos q_3, \quad z = q_1 q_2 \sin q_3.$$

Дифференцируя найденные соотношения по времени t и полагая массу пассивно гравитирующей точки равной единице, найдем выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} [(q_1^2 + q_2^2) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1^2 q_2^2 \dot{q}_3^2].$$

Для силовой функции U будем иметь

$$U = \frac{K}{r} + \omega x = \frac{2K}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{\omega}{2} (q_1^2 - q_2^2),$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля, а ω — напряженность наложенного однородного поля. Функция Лагранжа L запишется в виде

$$L = r (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} q_1^2 q_2^2 \dot{q}_3^2 + \frac{K}{r} + \frac{\omega}{2} (q_1^2 - q_2^2),$$

где

$$r = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2).$$

7. Уравнения Лагранжа, соответствующие лагранжиану, полученному в предыдущей задаче, имеют два первых интеграла: циклический

$$q_1^2 q_2^2 \dot{q}_3 = \alpha_3$$

и интеграл энергии

$$T - U = \alpha_1,$$

который с использованием циклического интеграла можно преобразовать к виду

$$r (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \Pi_* = \alpha_1,$$

где

$$\Pi_* = \frac{\alpha_3^2}{2q_1^2 q_2^2} - U$$

— измененная потенциальная энергия точки. Теперь запишем уравнения Лагранжа для координат q_1 и q_2 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (2r\dot{q}_1) - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \frac{\partial r}{\partial q_1} &= -\frac{\partial \Pi_*}{\partial q_1}, \\ \frac{d}{dt} (2r\dot{q}_2) - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \frac{\partial r}{\partial q_2} &= -\frac{\partial \Pi_*}{\partial q_2}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Исключим в каждом из написанных уравнений с помощью (*) величину $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2$, в результате чего получим

$$\frac{d}{dt} (2r\dot{q}_i) - (\alpha_1 - \Pi_*) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi_*}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2),$$

или

$$2r \frac{d}{dt} (2r\dot{q}_i) = \frac{\partial}{\partial q_i} [2r (\alpha_1 - \Pi_*)] \quad (i = 1, 2).$$

Вводя теперь вместо времени t новую независимую переменную τ , связанную с t дифференциальным соотношением

$$\frac{dt}{d\tau} = 2r,$$

окончательно получим

$$\frac{d^2 q_i}{d\tau^2} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2), \quad (**)$$

где

$$W = 2r (\alpha_1 - \Pi_*).$$

Каждое из уравнений (**) может быть проинтегрировано независимо от другого, так как

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial q_1} &= \frac{2}{q_1^3} \left(\omega q_1^6 + \alpha_1 q_1^4 + \frac{\alpha_2^2}{2} \right) = F_1(q_1), \\ \frac{\partial W}{\partial q_2} &= \frac{2}{q_2^3} \left(-\omega q_2^6 + \alpha_1 q_2^4 - \frac{\alpha_2^2}{2} \right) = F_2(q_2).\end{aligned}$$

8. Воспользуемся решением предельной задачи двух неподвижных центров, направляя ось Ox по линии действия реактивного ускорения ω . Так как движение плоское, то многочлены $Q_1(q_1)$ и $Q_2(q_2)$ имеют по одному нулевому корню, вследствие чего их можно представить в виде

$$\begin{aligned}Q_1(q_1) &= \omega q_1 \left(q_1^2 + \frac{\alpha_1}{\omega} q_1 + \frac{K - \alpha_2}{2\omega} \right), \\ Q_2(q_2) &= -\omega q_2 \left(q_2^2 - \frac{\alpha_1}{\omega} q_2 - \frac{K + \alpha_2}{2\omega} \right).\end{aligned}$$

При движении по круговой орбите имеем

$$\alpha_1 = -\frac{K}{2r_0} - \omega x_0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \omega y_0^2, \quad (*)$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля (см. предыдущую задачу). Обозначая корни многочленов Q_1 и Q_2 соответственно через β_1, β_2 и γ_1, γ_2 , найдем

$$\beta_{1,2} = -\frac{\alpha_1}{2\omega} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega(K - \alpha_2)}{\alpha_1^2}} \right], \quad \gamma_{1,2} = \frac{\alpha_1}{2\omega} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\omega(K + \alpha_2)}{\alpha_1^2}} \right].$$

Из рассмотрения многочлена Q_2 видим, что при $q_2 \geq 0$ неравенство $Q_2 \geq 0$ может выполняться только при $0 \leq q_2 \leq \gamma_2$, где γ_2 — положительный корень многочлена Q_2 . Следовательно, по координате q_2 движение не может быть инфинитным.

Корни β_1, β_2 в зависимости от знака подкоренного выражения могут быть либо вещественными положительными, либо комплексными. В последнем случае неравенство $Q_1 \geq 0$ может выполняться только при $0 \leq q_1 < \infty$, и, следовательно, при комплексных корнях движение инфинитно. Переходным между финитными и инфинитными движениями будет случай кратных корней ($\beta_1 = \beta_2$). Приравнявая подкоренное выражение нулю с учетом (*), получим уравнение

$$\omega^2 - 2 \frac{K}{r_0^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \alpha_0 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{K}{r_0^2} \right)^2 = 0,$$

где α_0 — угол между вектором реактивного ускорения и радиусом-вектором космического аппарата в начальный момент движения. Наименьшее значение ускорения ω_{\min} равно

$$\omega_{\min} = \frac{K}{r_0^2} \left[1 - \frac{1}{2} (\cos \alpha_0 + \sqrt{\cos^2 \alpha_0 - 4 \cos \alpha_0 + 3}) \right].$$

9. $\alpha_0 = \pi$, $\omega_{\min} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) g$, $r_{\max} = r_0 / \sqrt{\omega_{\min}/g} \approx 3,41 r_0$, где g — гравитационное ускорение на исходной круговой орбите.

Указание. Воспользуйтесь решением предыдущей задачи, дающим ускорение ω в функции угла α_0 в случае кратных корней многочлена Q_1 .

Так как $r = q_1 + q_2$, то r_{\max} будет равно сумме положительных корней многочленов Q_1 и Q_2 .

10. Направим ось Ox прямоугольной инерциальной системы координат $Oxyz$ по вектору реактивного ускорения ω . Используя решение предельной задачи двух неподвижных центров, имеем

$$\frac{dq_1}{d\tau} = \sqrt{2\omega q_1 (q_1 - \beta_1) (\beta_2 - q_2)}, \quad \frac{dq_2}{d\tau} = \sqrt{-2\omega q_2 (\gamma_1 - q_2) (q_2 - \gamma_2)},$$

где β_1, β_2 и γ_1, γ_2 — ненулевые корни многочленов $Q_1(q_1)$ и $Q_2(q_2)$ соответственно. Учитывая начальные условия задачи ($x_0 = r_0, y_0 = 0$) для произвольных постоянных α_1 и α_2 , получим

$$\alpha_1 = -\frac{K}{r_0} - \frac{K}{2r_0} = -\frac{3K}{2r_0}, \quad \alpha_2 = \frac{\omega y_0^2}{2} = 0,$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля. Подставляя эти значения в выражения для многочленов Q_1 и Q_2 , найдем, что ненулевые корни многочлена Q_1 — кратные и $\beta_1 = \beta_2 = r_0$. Ненулевые корни γ_1, γ_2 многочлена Q_2 равны

$$\gamma_1 = -(\sqrt{2} - 1)r_0, \quad \gamma_2 = (\sqrt{2} - 1)r_0.$$

Так как в начальный момент $x_0 = r_0$, то $q_{10} = r_0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{dq_1}{d\tau}\right)_{\tau=0} = [\sqrt{2\omega q_1 (q_1 - r_0)^2}]_{q_1=r_0} = 0. \quad (*)$$

Поскольку $q_{10} = r_0$ является кратным корнем многочлена Q_1 , то имеем также

$$\left(\frac{d^2q_1}{d\tau^2}\right)_{\tau=0} = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\right)_{q_1=r_0} = 0. \quad (**)$$

Из (*) и (**) следует, что во все время движения координата q_1 остается неизменной, т. е. космический аппарат движется по параболе $q_1 = r_0$, охватывающей исходную круговую орбиту. Это движение носит колебательный характер, поскольку многочлен $Q_2(q_2)$ может принимать положительные значения только на отрезке $0 \leq q_2 \leq \gamma_2$. Таким образом, траекторией космического аппарата будет дуга параболы

$$y^2 = 4r_0(r_0 - x),$$

отсекаемая на ней параболой (рис. P.7.2)

$$y^2 = 4\gamma_2(\gamma_2 + x), \quad \gamma_2 = (\sqrt{2} - 1)r_0.$$

11. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2q_1}{d\tau^2} = \frac{dQ_1(q_1)}{dq_1}$$

можно трактовать как уравнение одномерного движения материальной точки единичной массы с силовой функцией $Q_1(q_1)$. Тогда уравнение

$$Q_1'(q_1) = 0$$

служит для определения положения равновесия точки, которому соответствует стационарное движение космического аппарата по параболе

$$y^2 = 4r_0(r_0 - x),$$

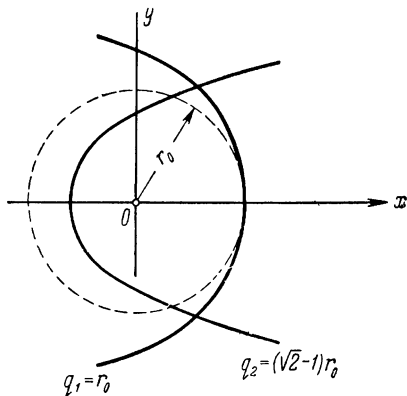


Рис. P.7.2.

где r_0 является корнем указанного уравнения (см. решение предыдущей задачи). Согласно теореме Лагранжа об устойчивости положения равновесия $q_1 = r_0$ получаем условие устойчивости стационарного движения по параболе

$$Q_1''(r_0) < 0,$$

которое в данном случае (вследствие обращения теоремы Лагранжа) является необходимым и достаточным. Производя дифференцирование, получим

$$Q_1''(r_0) = \frac{K}{r_0^3} > 0,$$

т. е. силовая функция в положении равновесия имеет минимум. Стационарное движение по дуге параболы $q_1 = r_0$ орбитально неустойчиво.

12. Направим ось Ox прямоугольной инерциальной системы координат по вектору радиационного ускорения ω и воспользуемся решением предельной задачи двух неподвижных центров в плоском случае. Максимальное отклонение спутника по оси Ox определяется точкой пересечения одной из парабол $q_1 = \beta_1$, $q_2 = \gamma_2$, где β_1 и γ_2 — положительные корни многочленов Q_1 и Q_2 соответственно, которые вычисляются по формулам (см. решение задачи 8):

$$\beta_1 = -\frac{1}{2\omega} \left[\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 2\omega(K - \alpha_2)} \right],$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\omega} \left[\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 2\omega(K + \alpha_2)} \right],$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{K}{2r_0} - \omega r_0, \quad \alpha_2 = 0,$$

а K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля.

Воспользовавшись малостью радиационного ускорения ω , разложим β_1 и γ_2 в ряды по ω . С точностью до первой степени ω получим

$$\beta_1 = r_0 + O(\omega^2), \quad \gamma_2 = r_0 \left(1 - \frac{4\omega r_0^3}{K} \right).$$

Максимальное отклонение δr_{\max} будет

$$\delta r_{\max} = |\gamma_2 - r_0| = \frac{4\omega r_0^3}{K}.$$

Радиационное ускорение ω равно

$$\omega = \frac{p_0}{m} \int_S d\sigma,$$

где m — масса спутника, $d\sigma$ — проекция элементарной площадки поверхности S спутника на плоскость, нормальную к солнечным лучам. Для сферического спутника диаметром D найдем:

$$\omega = \frac{\pi p_0 D^2}{4m}.$$

Вычисляя δr_{\max} , получим

$$\delta r_{\max} = \frac{\pi p_0 D^2 r_0}{Km} = 145 \text{ м}.$$

13. Максимально удаленная точка траектории спутника должна лежать на одной из парабол, ограничивающих область возможных движений. Уравнения

этих парабол найдем, используя связь между параболическими и прямоугольными координатами спутника:

$$q_1 = \frac{r+x}{2}, \quad q_2 = \frac{r-x}{2}.$$

Подставляя вместо q_1 и q_2 положительные корни β_1 и γ_2 многочленов Q_1 и Q_2 соответственно, запишем уравнения парабол в виде

$$y^2 = 2\beta_1(\beta_1 - x), \quad y^2 = 2\gamma_2(\gamma_2 + x).$$

Для радиуса-вектора какой-либо точки первой параболы имеем выражение

$$r = \sqrt{x^2 + 2\beta_1(\beta_1 - x)},$$

из которого видно, что r достигает минимума в вершине параболы, а с удалением от нее монотонно возрастает. Так как аналогичные рассуждения справедливы и для второй параболы, то максимально удаленной от начала координат будет точка пересечения указанных парабол. Ее координаты x_{\max} , y_{\max} найдутся из системы уравнений

$$y_{\max}^2 = 2\beta_1(\beta_1 - x_{\max}), \quad y_{\max}^2 = 2\gamma_2(\gamma_2 + x_{\max}).$$

Решая эти уравнения, найдем

$$x_{\max} = \beta_1 - \gamma_2, \quad y_{\max} = \pm \sqrt{\beta_1\gamma_2}, \quad r_{\max} = \beta_1 + \gamma_2.$$

Воспользовавшись формулами для β_1 и γ_2 , полученными в предыдущей задаче, будем иметь

$$\delta r_{\max} = r_{\max} - r_0 \approx r_0, \quad \alpha = \arccos \frac{x_{\max}}{r_{\max}} \cong \frac{2ar_0^3}{K} \approx \frac{\pi}{2}.$$

14. При движении спутника на освещенном участке орбиты от точки A до точки B его полная энергия остается неизменной и равной

$$E_A = E_B = \frac{V_B^2}{2} - \frac{K}{r_B} - \omega x_B.$$

В достаточно малой окрестности точки B , находящейся в тени, полная энергия E_B будет

$$E_B^* = \frac{V_B^2}{2} - \frac{K}{r_B},$$

и, следовательно, имеем

$$E_B = E_B^* - \omega x_B.$$

Аналогично в точке C при выходе из тени найдем

$$E_C = E_C^* - \omega x_C,$$

где E_C^* — полная энергия кеплеровского движения на дуге BC . Так как $E_B^* = E_C^*$, то изменение δE полной энергии за виток будет равно

$$\delta E = E_C - E_B = \omega(x_B - x_C).$$

15. Из общего решения предельной задачи двух неподвижных центров имеем

$$\frac{dq_1}{d\tau} = \sqrt{2Q_1(q_1)}, \quad Q_1(q_1) = \omega q_1^3 + \alpha_1 q_1^2 + \frac{K - \alpha_2}{2} q_1 - \frac{\alpha_3}{8},$$

где τ — монотонно возрастающая вместе с временем переменная. Дифференцируя приведенное уравнение по τ , найдем

$$\frac{d^2 q_1}{d\tau^2} = \frac{dQ_1}{dq_1}.$$

Полученное уравнение можно рассматривать как уравнение одномерного движения материальной точки единичной массы в потенциальном поле, задаваемом силовой функцией $Q_1(q_1)$. Положение равновесия точки $q_1 = \text{const}$, определяемое из уравнения

$$Q'_1 = 3\omega q_1^2 + 2\alpha_1 q_1 + \frac{K - \alpha_2}{2} = 0,$$

соответствует стационарному параболоидальному движению. Обозначая корни полученного трехчлена через β_1, β_2 , будем иметь

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{3\omega} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{3\omega}\right)^2 - \frac{K - \alpha_2}{6\omega}},$$

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_1}{3\omega} - \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{3\omega}\right)^2 - \frac{K - \alpha_2}{6\omega}}.$$

При существовании параболоидальных движений многочлен Q_1 должен иметь кратный корень, и, следовательно, его дискриминант должен обращаться в нуль. Поэтому постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ удовлетворяют соотношению

$$\left[\frac{2}{27} \alpha_1^3 - \frac{\omega(K - \alpha_2)}{6} - \frac{a^2 \alpha_3^2}{8} \right]^2 + 4 \left[\frac{\omega(K - \alpha_2)}{2} - \frac{\alpha_1^3}{3} \right]^3 = 0.$$

Используя связь параболоидальной координаты q_1 с декартовыми:

$$q_1 = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

найдем уравнения параболоидов, по которым будет двигаться точка

$$y^2 + z^2 = 2\beta_1(\beta_1 - x), \quad (*)$$

$$y^2 + z^2 = 2\beta_2(\beta_2 - x). \quad (**)$$

Для исследования устойчивости положения равновесия (а следовательно, орбитальной устойчивости стационарного движения $q_i = \beta_i$ ($i = 1, 2$)) воспользуемся теоремой Лагранжа, согласно которой для устойчивости положения равновесия $q_1 = \text{const}$ достаточно, чтобы

$$\left(\frac{d^2 Q_1}{dq_1^2} \right)_{q_i = \beta_i} = 6a \left(\beta_i + \frac{\alpha_1}{3\omega} \right) < 0 \quad (i = 1, 2).$$

Так как в данном случае теорема Лагранжа обратима, то написанное неравенство дает необходимый и достаточный признак устойчивости. Таким образом, при $\alpha_1 < 0$ движение по параболоиду (*) неустойчиво, а по параболоиду (**) устойчиво. При $\alpha_1 > 0$ оба параболоидальных движения неустойчивы.

16. Постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ должны удовлетворять уравнению

$$\left[\frac{2\alpha_1^3}{27} - \frac{\omega(K + \alpha_2)}{6} - \frac{\omega^2 \alpha_1^2}{8} \right]^2 + 4 \left[\frac{\omega(K - \alpha_2)}{2} - \frac{\alpha_1^3}{3} \right]^3 = 0.$$

Уравнение параболоида будет

$$y^2 + z^2 = 4\gamma(\gamma + x),$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{3\omega} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{3\omega}\right)^2 + \frac{K + \alpha_2}{6\omega}}.$$

Движение устойчиво при любых значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь решением предыдущей задачи.

§ 7

1. Гравитационный потенциал Юпитера можно аппроксимировать силовой функцией (7.7.3), положив в ней $\delta = 0, c = 8656,7$ км.

2. См. ответ в предыдущей задаче. Для аппликаты шаровой точки инерции Сатурна следует взять значение 7812 км.

3. $(1 + \xi^2) \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + (1 - \eta^2) \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 + \left[\frac{1}{1 - \eta^2} - \frac{1}{1 + \xi^2}\right] \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)^2 = 2fmc(\xi - \sigma\eta) + 2hc^2(\xi^2 + \eta^2)$, где h — полная механическая энергия.

4. Полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби для обобщенной задачи двух неподвижных центров записывается следующим образом:

$$W = -\alpha_1 t + \alpha_3 \zeta + \int \frac{\sqrt{L(\xi)} d\xi}{1 + \xi^2} + \int \frac{\sqrt{M(\eta)} d\eta}{1 - \eta^2},$$

где

$$L(\xi) = 2(1 + \xi^2)(hc^2\xi^2 + fmc\xi + \alpha_2) + \alpha_3^2,$$

$$M(\eta) = 2(1 - \eta^2)(hc^2\eta^2 - fmc\sigma\eta - \alpha_2) - \alpha_3^2,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — произвольные постоянные.

У к а з а н и е. См. решение задачи (6.2.5).

5. У к а з а н и е. Воспользуйтесь интегралом живых сил для обобщенной задачи двух неподвижных центров. Выделите в его выражении полную механическую энергию в невозмущенном кеплеровском движении.

6. Круговые экваториальные орбиты устойчивы, если радиус орбиты удовлетворяет условию $r > 2c$, где c — аппликата шаровой точки инерции планеты. Для Земли $c = 210$ км, поэтому для всех реальных ИСЗ условие устойчивости будет выполненным.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь необходимыми и достаточными условиями устойчивости круговых орбит в осесимметричном поле, полученными в задаче (6.4.3).

7. У к а з а н и е. Воспользуйтесь вторым из уравнений системы (7.7.7).

8. Необходимое и достаточное условие устойчивости эллипсоидальных решений по отношению к эксцентриситету записывается в виде

$$4c^3c_1^2 \operatorname{sh} v_0 - fm \operatorname{ch}^6 v_0 \leq 0,$$

где c_1 — невозмущенное значение постоянной площадей.

У к а з а н и е. Так как эксцентриситет эллипсоида, на котором лежат траектории, равен $1/\operatorname{sh} v_0$, то задача сводится к исследованию устойчивости стационарного решения $v = v_0 = \operatorname{const}$. Для этой цели можно воспользоваться вторым уравнением системы (7.7.7). Если положить

$$x_1 = v - v_0, \quad x_2 = v',$$

то дифференциальные уравнения первого приближения запишутся в виде

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \left(\frac{4c_1^2}{\operatorname{ch}^4 v_0} - \frac{fm \operatorname{ch}^2 v_0}{c^3 \operatorname{sh} v_0} \right) x_1.$$

Тогда корни характеристического уравнения не будут иметь положительных действительных частей, если выполнено условие

$$4c^2c_1^2 \operatorname{sh} v_0 - fm \operatorname{ch}^6 v_0 \leq 0.$$

Это же условие оказывается и достаточным, что можно установить, если в качестве функции Ляпунова взять первый интеграл (7.7.10).

9. У к а з а н и е. Рассмотрите уравнение (7.7.9).

10. Гиперболические движения спутника в меридиональной плоскости осесимметричной планеты, если постоянная площадей в интеграле (7.7.5) равна нулю.

11. У к а з а н и е. Воспользуйтесь уравнением (7.7.7). Функцию Ляпунова можно построить с помощью интеграла (7.7.9). Условие знакоопределенности функции Ляпунова запишется в виде

$$\frac{c_1^2 \cos^2 u_0}{\sin^4 u_0} > 0.$$

Здесь c_1 — постоянная площадей в невозмущенном движении. Это условие выполняется всегда. Оно будет необходимым и достаточным, что нетрудно проверить, рассмотрев дифференциальные уравнения движения первого приближения.

$$12. E = M + \sum_{m=0}^n \frac{e^{m+1}}{(m+1)!} \frac{d^m}{dM^m} (\sin^{m+1} M) + 2\lambda \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{M}{2} \right).$$

У к а з а н и е. Для уравнения

$$z - a - \alpha F(z) - \beta \Phi(z) = 0,$$

в котором $F(z)$ и $\Phi(z)$ — аналитические функции в окрестности точки $z = a$, произвольную аналитическую функцию ψ от корня этого уравнения можно представить рядом

$$\psi = \psi(a) + \sum_{\substack{n, m=0 \\ m+n \neq 0}}^{\infty} \frac{\alpha^m \beta^n}{m!n!} \frac{d^{m+n-1}}{da^{m+n-1}} \{ \psi'(a) [F(a)]^m [\Phi(a)]^n \}.$$

Этот ряд представляет обобщение ряда Лагранжа. Его можно применить для решения аналога уравнения Кеплера.

Г Л А В А VIII

§ 1

1. Обозначим через S и T соответственно радиальную и трансверсальную составляющие возмущающей силы, а через Φ_r и Φ_n — ее тангенциальную и нормальную составляющие. Пусть e — эксцентриситет орбиты, а v — истинная аномалия движущейся точки в рассматриваемый момент времени. Искомые зависимости записываются в виде

$$S = \frac{\Phi_r e \sin v - \Phi_n (1 + e \cos v)}{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}},$$

$$T = \frac{\Phi_r (1 + e \cos v) + \Phi_n e \sin v}{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}.$$

2. Пусть Φ — модуль постоянного вектора реактивной тяги, α — угол, который составляет линия действия тяги с линией аписид. Тогда радиальная и трансверсальная составляющие силы будут соответственно равны

$$S = \Phi \cos(v - \alpha), \quad T = \Phi \sin(v - \alpha),$$

где v — истинная аномалия движущейся точки.

Из таблиц Кэли (см. Приложение) с требуемой точностью получим

$$\begin{aligned} \cos v &= \left(1 + \frac{9}{8} e^2\right) \cos M + e \cos 2M + \frac{9}{8} e^2 \cos 3M + \dots, \\ \sin v &= \left(1 - \frac{7}{8} e^2\right) \sin M + e \sin 2M + \left(1 + \frac{9}{8} e^2\right) \sin 3M + \dots \end{aligned}$$

Тогда для искоемых составляющих силы тяги будем иметь

$$\begin{aligned} S &= \Phi \left\{ \left(1 + \frac{9}{8} e^2\right) \cos(M - \alpha) - 2e^2 \sin \alpha \sin M + \sin \alpha \sin 3M + \right. \\ &\quad \left. + e \cos(2M - \alpha) + \frac{9}{8} e^2 \cos(3M - \alpha) + \dots \right\}, \\ T &= \Phi \left\{ \left(1 + \frac{9}{8} e^2\right) \sin(M - \alpha) - 2e^2 \cos \alpha \sin M + \cos \alpha \sin 3M + \right. \\ &\quad \left. + e \sin(2M - \alpha) + \frac{9}{8} e^2 \sin(3M - \alpha) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

3. В пределах точности, предусмотренной условиями задачи, возмущающая функция будет равна (см. § 2 гл. II)

$$R = \frac{fmJ_2}{r^3} P_2(\sin \varphi) = \frac{fmJ_2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right).$$

Но

$$\sin \varphi = \sin i \sin(v + \omega).$$

Поэтому

$$R = \frac{fmJ_2}{2\rho^3} (1 + e \cos v)^3 [3 \sin^2 i \sin^2(v + \omega) - 1].$$

Пользуясь таблицами Кэли (см. Приложение), находим

$$\begin{aligned} R &= \frac{fmJ_2}{2a^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 + 3e \cos M + \frac{9}{2} e^2 \cos 2M\right) + \\ &\quad + \frac{3fmJ_2}{4a^3} \sin^2 i \left[-\frac{1}{2} e \cos(M + 2\omega) + \left(1 - \frac{5}{2} e^2\right) \cos(2M + 2\omega) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{2} e \cos(3M + 2\omega) + \frac{17}{2} e^2 \cos(4M + 2\omega) \right]. \end{aligned}$$

$$4. \quad \frac{\partial R}{\partial i} = \frac{3fmJ_2}{2\rho^3} (1 + e \cos v)^3 \sin^2(v + \omega) \sin 2i,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{3fmJ_2}{2\rho^3} (1 + e \cos v)^3 \sin^2 i \sin 2u.$$

5. Используя формулу (8.1.2), находим радиальную составляющую возмущающего ускорения, которая с точностью до малых высшего порядка равна

$$1 + 3 \cos \vartheta = 0,$$

где θ — угол между направлениями из притягивающего центра на возмущающее и возмущаемое тела.

Отсюда находим, что радиальная составляющая равна нулю при $\theta = 54^\circ 44'$, $\theta = 125^\circ 16'$, $\theta = 234^\circ 44'$, $\theta = 305^\circ 16'$.

$$6. v - M = \left[4 \left(\frac{e}{2} \right) - 2 \left(\frac{e}{2} \right)^3 \right] \sin M + 5 \left(\frac{e}{2} \right)^2 \sin 2M + \frac{26}{3} \left(\frac{e}{2} \right)^3 \sin 3M + \dots$$

$$7. \frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \left[2 \left(\frac{e}{2} \right) - 3 \left(\frac{e}{2} \right)^3 \right] \cos M - 2 \left(\frac{e}{2} \right)^2 \cos 2M - 3 \left(\frac{e}{2} \right)^3 \cos 3M + \dots$$

§ 2

1. Дифференциальные уравнения для новых оскулирующих элементов $p = e \sin \omega$ и $q = e \cos \omega$ при непотенциальных возмущающих силах можно записать в виде

$$\frac{dq}{dt} = \bar{S} \sin u + [(q + \cos u) \Lambda^{-1} + \cos u] \bar{T} + p \sin u \cdot \Lambda^{-1} \operatorname{ctg} i \cdot \bar{W},$$

$$\frac{dp}{dt} = -\bar{S} \cos u + [(p + \sin u) \Lambda^{-1} + \sin u] \bar{T} - p \sin u \cdot \Lambda^{-1} \operatorname{ctg} i \cdot \bar{W}.$$

В этих уравнениях

$$\Lambda = 1 + q \cos u + p \sin u,$$

а

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{p}{K}} S, \quad \bar{T} = \sqrt{\frac{p}{K}} T, \quad \bar{W} = \sqrt{\frac{p}{K}} W,$$

причем u — аргумент широты, i — наклонение орбиты, K — гравитационный параметр, p — фокальный параметр орбиты, S , T , W — составляющие возмущающего ускорения по радиусу-вектору, трансверсали и нормали к плоскости орбиты.

Если возмущающая сила потенциальна и определяется пертурбационной функцией R , то

$$S = \frac{\partial R}{\partial r},$$

$$T = \frac{\cos u \sin i}{r \cos \varphi} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{\cos i}{r \cos u \cos \varphi} \frac{\partial R}{\partial \lambda},$$

$$W = \frac{\cos i}{r \cos \varphi} \frac{\partial R}{\partial \varphi} - \frac{\cos u \sin i}{r \cos \varphi} \frac{\partial R}{\partial \lambda},$$

где r , φ , λ — сферические координаты движущейся точки.

2. Дифференциальные уравнения для элементов $l_1 = \operatorname{tg} \sin \delta$, и $l_2 = \operatorname{tg} i \cos \delta$, в случае потенциальных возмущений запишутся в виде

$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial l_2} - \frac{l_1 \sec i \sec^2 \frac{i}{2}}{2na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial e} \right),$$

$$\frac{dl_2}{dt} = -\frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial l_1} - \frac{l_2 \sec i \sec^2 \frac{i}{2}}{2na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial e} \right)$$

(здесь использованы те же обозначения, что и в предыдущей задаче).

3. Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов при движении тела в сопротивляющейся среде имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}{n\sqrt{1-e^2}} T, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}(e+\cos v)}{na\sqrt{1+2e\cos v+e^2}} T, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}\sin v}{nae\sqrt{1+2e\cos v+e^2}} T, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= 0, \\ \frac{di}{dt} &= 0, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{2(1-e^2)(1+e\cos v+e^2)\sin v}{nae(1+e\cos v)\sqrt{1+2e\cos v+e^2}} T, \end{aligned}$$

где $\sigma = -n\tau$.

$$\begin{aligned} 4. \quad \frac{dv}{dt} &= \frac{\sqrt{Kp}}{r^2} - \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{K}} \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right) T \sin v - S \cos v \right], \\ 9. \quad \frac{dr_n}{dt} &= \frac{1}{(1+e)^2} \sqrt{\frac{p^3}{K}} \left[-S \sin v + T \frac{2(1-\cos v)+e\sin^2 v}{1+e\cos v} \right], \\ \frac{dr_a}{dt} &= \frac{1}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{p^3}{K}} \left[S \sin v + T \frac{2(1+\cos v)-e\sin^2 v}{1+e\cos v} \right]. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Продифференцируйте по времени соотношения

$$r_n = a(1-e), \quad r_a = a(1+e),$$

а затем воспользуйтесь дифференциальными уравнениями для оскулирующих элементов a и e .

§ 3

1. Для вычисления осредненного значения пертурбационной функции (8.3.1) предварительно найдем средние за период значения величин $(a/r)^3$ и $(a/r)^3 \sin 2v$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 dM = (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2v dM = 0,$$

Тогда осредненная пертурбационная функция будет равна

$$\bar{R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R dM = \frac{KJ_2 R_2^2}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) (1-e^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Обратимся теперь к уравнениям в оскулирующих элементах (8.2.4). Видим, что правые части уравнений относительно большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты тождественно равны нулю:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{di}{dt} = 0,$$

т. е.

$$a = \text{const}, \quad e = \text{const}, \quad i = \text{const}.$$

3. $a = p = 6900$ км, $\dot{\Omega} = -0,38$ град/оборот = $-6,1$ град/сутки, $\dot{\omega} = 0,4$ град/оборот = $6,5$ град/сутки.

4. $\dot{\Omega} = -4,27$ град/сутки, $\dot{\omega} = 0,4$ град/сутки.

5. $\dot{\Omega} = -2,7$ град/сутки, $\dot{\omega} = -0,42$ град/сутки.

6. Вековое движение узла достигает максимума при $i = 0^\circ$ и $i = 180^\circ$. Вековое движение перицентра максимально при $i = 0^\circ$ и $i = 180^\circ$.

7. $\cos i = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}$. Остальные элементы орбиты могут принимать любые значения.

8. $a = 1,5R_3$, $e = 0,2$, $M_0 \approx 172^\circ$, $i = 30^\circ$, $\Omega \approx 161^\circ$, $\omega = 87^\circ,5$.

9. Восходящий узел орбиты перемещался в направлении, противоположном обращению спутника, со скоростью $\sim 0,294$ град/оборот; перигей орбиты перемещался в направлении обращения спутника со скоростью $\sim 0,886$ град/оборот.

10. $J_2 = 0,93 \cdot 10^{-3}$

Указание. Воспользуйтесь формулой (8.3.2), определяющей вековое возмущение в долготе восходящего узла $\dot{\Omega}$ от второй зональной гармоники потенциала тяготения Земли.

11. Из формулы третьего закона Кеплера

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{K}$$

следует, что

$$2 \ln T = \ln \frac{2\pi}{K} + 3 \ln a,$$

или

$$2 \frac{dT}{T} = 3 \frac{da}{a}.$$

Полагая

$$T = 96\text{м}, \quad dT = 3^s, \quad a \approx 7000 \text{ км},$$

получаем

$$\Delta a \approx 2,1 \text{ км/сутки}.$$

13. Так как скорость спутника V в каждый момент времени перпендикулярна его радиусу-вектору r , проведенному из центра притяжения, то спутник все время находится в одной из апсидальных точек. Пусть ρ — радиус окружности, которую описывает спутник. Тогда

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{K}{r^2} \sin \varphi,$$

где K — гравитационный параметр притягивающего центра. Так как $\rho = r \cos \varphi$, а $V_{\text{кр}}^2 = K/r$, то полученное соотношение можно представить в виде

$$\left(\frac{V}{V_{\text{кр}}} \right)^2 = \cos^2 \varphi < 1,$$

и, следовательно, спутник все время находится в апогее оскулирующей орбиты, а его истинная аномалия сохраняет неизменное значение, равное π .

Для эксцентриситета e оскулирующей орбиты получим

$$e = 1 - \left(\frac{V_a}{V_{кр}} \right)^2 = \sin^2 \varphi,$$

где V_a — скорость в апогее оскулирующей орбиты.

14. Проектируя скорость космического аппарата на радиус-вектор и трансверсаль, получим

$$\dot{r} = V_0 \sin \vartheta_0, \quad r \dot{\varphi} = V_0 \cos \vartheta_0, \quad (*)$$

где V_0 и ϑ_0 — соответственно скорость и угол ее наклона к трансверсали в точке эллиптической орбиты, для которой $v = \pi/2$. Из соотношений задачи двух тел имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{e_0 \sin v}{1 + e_0 \cos v} = e_0.$$

Так как $r_0 = a_0(1 - e^2)$, где a_0 — полуось исходной эллиптической орбиты, то из интеграла энергии

$$\frac{V_0^2}{2} - \frac{K}{r_0} = -\frac{K}{2a_0}$$

найдем

$$V_0^2 = \frac{K}{r_0} (1 + e_0^2),$$

где K — гравитационный параметр притягивающего центра.

Разделив уравнение (*) друг на друга, получим дифференциальное уравнение новой траектории

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \operatorname{tg} \vartheta_0.$$

Интегрируя и полагая $\varphi = 0$ при $r = r_0$, будем иметь

$$r = r_0 \exp(\varphi e_0),$$

т. е. новая траектория космического аппарата является логарифмической спиралью.

Эксцентриситет e оскулирующей орбиты можно вычислить по формуле

$$e = \sqrt{1 + \frac{2rV_0^2}{K} \left(\frac{rV_0^2}{2K} - 1 \right) \cos^2 \vartheta}.$$

Учитывая предыдущие уравнения, получим

$$e = \sqrt{1 + [(1 + e_0^2) \exp(\varphi e_0) - 2] \exp(\varphi e_0)}.$$

В точке приобретения второй космической скорости эксцентриситет оскулирующей орбиты должен быть равен единице, откуда

$$(1 + e_0^2) \exp(\varphi e_0) = 2.$$

Логарифмируя, получим

$$\varphi = \frac{1}{e_0} \ln \frac{2}{1 + e_0^2}.$$

15. Так как при движении по окружности скорость V все время перпендикулярна радиусу-вектору r , то значение оскулирующего эксцентриситета e найдется по формуле

$$e = \frac{rV^2}{K} - 1,$$

где K — гравитационный параметр притягивающего центра. С другой стороны, при движении по окружности имеем

$$\frac{V^2}{r} = \frac{K}{r^2} + \omega$$

и, следовательно,

$$e = \frac{\omega r^2}{K}.$$

Оскулирующая орбита будет гиперболой, если $e > 1$, т. е. если

$$r > \sqrt{\frac{K}{\omega}}.$$

16. У к а з а н и е. Составьте дифференциальное уравнение, описывающее изменение p со временем, используя дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов a и e , а также уравнение

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{a} \frac{da}{dt} - 2ae \frac{de}{dt},$$

получающееся в результате дифференцирования соотношения

$$p = a(1 - e^2).$$

17. У к а з а н и е. Дифференциальное уравнение, определяющее изменение большой полуоси оскулирующего эллипса, имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{p} \sqrt{\frac{p}{K}} [Se \sin v + T(1 + e \cos v)].$$

Пусть ϑ — угол между касательной и трансверсалью. Тогда проекции возмущающего ускорения n на радиус-вектор и трансверсаль будут соответственно равны

$$S = -n \cos \vartheta, \quad T = n \sin \vartheta,$$

где

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v}.$$

§ 4

1. Максимальный радиус сферы действия Земли по отношению к Солнцу равен $0,00631$ а. е. ($0,944 \cdot 10^6$ км), а минимальный — $0,00610$ а. е. ($0,913 \cdot 10^6$ км). Максимальный радиус сферы тяготения равен $0,00177$ а. е. ($0,265 \cdot 10^6$ км), а минимальный — $0,00171$ а. е. ($0,256 \cdot 10^6$ км).

2. Наибольший радиус сферы действия Луны по отношению к Солнцу равен $161\,700$ км, а наименьший — $156\,400$ км. Наибольший радиус сферы тяготения Луны по отношению к Солнцу равен $29\,200$ км, а наименьший — $28\,200$ км.

3. Наибольший и наименьший радиусы сферы действия Луны по отношению к Земле соответственно равны $62\,500$ км и $69\,800$ км, а наибольшее и наименьшее значения радиуса сферы тяготения Луны равны $45\,000$ км и $40\,300$ км.

4. $V = \sqrt{\frac{2K_3}{S_d}} = 0,92$ км/сек, $t = 188^{\text{h}}$, где R_d — радиус сферы действия Земли (относительно Солнца).

5. $V_{111} = \sqrt{(V_2^2 - 1)^2 V_{кр}^2 + V_{п}^2}$, где $V_{кр}$ — круговая скорость относительно Солнца вблизи планеты, $V_{п}$ — параболическая скорость относительно планеты у ее поверхности. Для Марса

$$V_{кр}^2 \approx 581, \quad V_{п}^2 = \frac{2K_{п}}{r_{п}} \approx 25,2, \quad V_{111} = \sqrt{105,7 + 25,2} \approx 11,5 \text{ км/сек.}$$

6. При выходе из сферы действия Земли ракета должна иметь нулевую скорость относительно Солнца и, следовательно, скорость $V_1 = 29,8 \text{ км/сек}$ относительно Земли.

Согласно интегралу энергии

$$V_0^2 - \frac{2K_3}{r_0} = V_1^2 - \frac{2K_3}{R_d}.$$

Здесь

$$r_0 = 6600 \text{ км}, \quad R_d = 925 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

Поэтому $V_0 \approx 27,7 \text{ км/сек}$. Падение на Солнце можно рассматривать как полет по очень вытянутому эллипсу с большой осью $2a = 150 \cdot 10^6 \text{ км}$. Время падения равно

$$\frac{1}{2} T = \pi \sqrt{\frac{a^3}{K_C}} = 56,1 \cdot 10^5 \text{ сек} \approx 65 \text{ суток.}$$

8. Пусть R_3 и R_M — средние гелиоцентрические расстояния Земли и Марса. Тогда $a = \frac{1}{2}(R_M + R_3) \approx 189 \cdot 10^6 \text{ км}$. Скорость V_2 ракеты относительно Солнца в момент выхода из сферы действия Земли определяется из зависимости $V_2^2 = K_C \left(\frac{2}{R_d} - \frac{1}{a} \right)$, откуда $V_2 = 32,4 \text{ км/сек}$.

Если направление движения ракеты совпадает с направлением движения Земли вокруг Солнца, то скорость V_1 ракеты относительно Земли будет равна $V_2 - V_3$, где V_3 — круговая скорость движения Земли вокруг Солнца,

$$V_1 = 32,4 - 29,8 = 2,6 \text{ км/сек},$$

$$V_0^2 - \frac{2K_3}{r_0} = V_1^2 - \frac{2K_3}{R_d} \quad (r_0 = 6800 \text{ км}, \quad R_d \approx 925 \cdot 10^3 \text{ км}).$$

Отсюда $V_0 = 11,1 \text{ км/сек}$.

9. Сохраняя обозначения задачи 5, имеем

$$V_2 \approx 42,1 \text{ км/сек}, \quad V_1 = 42,1 - 29,8 \approx 12,3 \text{ км/сек},$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2K_3}{r_0} + V_1^2 - \frac{2K_3}{R_d}} \approx 16,4 \text{ км/сек.}$$

10. а) Момент старта АМС с борта ИСЗ произошел в 5^h по московскому времени;

б) эксцентриситет и большая полуось гелиоцентрической орбиты АМС после выхода из сферы действия были равны $e = 0,176$ и $a = 128,5 \cdot 10^6 \text{ км}$; угловая дальность между точкой выхода АМС из сферы действия Земли и точкой входа в сферу действия Венеры составляла 123° ;

в) встреча АМС с Венерой имела место через 96 суток после выхода АМС из сферы действия Земли, т. е. около 20 мая 1961 г.

ГЛАВА IX

§ 1

1. $a = aV_r/(1 - at)$, $\Phi = \alpha M_0 V_r e^{-at}$.

2. Так как скорость ракеты монотонно возрастает, то ее можно взять в качестве независимой переменной в теореме об изменении кинетической энергии $T = \frac{MV^2}{2}$. Составляя производную

$$\frac{dT}{dV} = V \left(M + \frac{1}{2} \frac{dM}{dV} V \right)$$

и учитывая связь между M и V в формуле Циолковского

$$M = M_0 e^{-\frac{V}{V_r}},$$

получим

$$\frac{dT}{dV} = M_0 V \left(1 - \frac{V}{2V_r} \right).$$

Так как в начальный момент $V_0 = 0$, то при $V/V_r < 2$ кинетическая энергия с ростом скорости возрастает и достигает экстремума при $V = 2V_r$, после чего начинает монотонно убывать.

3. В начале движения количество движения увеличивается и достигает экстремума при $V = V_r$, после чего монотонно убывает.

4. Обозначая коэффициент пропорциональности через k , запишем теорему об изменении кинетической энергии системы «ракета + выбрасываемые газы»:

$$T_1 - T = FV\Delta t - k\Delta M,$$

где $FV\Delta t$ — работа внешних сил на элементарном абсолютном перемещении ракеты, а T и T_1 — кинетическая энергия ракеты в моменты времени t и $t + \Delta t$ соответственно. Далее находим

$$T_1 - T = \frac{1}{2} (M + \Delta M) (V + \Delta V)^2 - \frac{1}{2} (MV^2 + Mu^2).$$

Переходя к пределу и используя уравнение Мещерского

$$M\dot{V} = \dot{M}(u - V) + F,$$

получим

$$V_r = u - V = \sqrt{2k}.$$

5. Проведем через центр притяжения O неизменную прямую Ox , параллельную вектору реактивной тяги Φ . Обозначая через x^0 единичный вектор этой прямой, а через r — радиус-вектор ракеты, проведенный из центра притяжения, запишем уравнения движения ракеты

$$M \frac{dV}{dt} = - \frac{KM}{r^3} + \Phi x^0, \quad (*)$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля. Имея в виду, что $M = M_0 e^{-\alpha t}$ ($\alpha = \text{const}$), для модуля тяги получим равенство

$$\Phi = V_r \left| \frac{dM}{dt} \right| = \alpha M V_r.$$

Подставляя полученное выражение в (*), приходим к уравнению

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{Kr}{r^3} + \alpha V_r x^0.$$

Умножая последнее уравнение первый раз скалярно, а второй раз векторно на dr , будем иметь

$$\begin{aligned} d\left(\frac{V^2}{2}\right) &= -\frac{K}{r^2} dr + \alpha V_r dx, \\ d(r \times V) &= \alpha V_r (dr \times x^0). \end{aligned}$$

Интегрирование первого уравнения дает

$$T + \Pi = \text{const}, \quad T = \frac{V^2}{2}, \quad \Pi = -\frac{K}{r} - \alpha V_r x.$$

Проектируя второе уравнение на направление реактивной тяги, найдем

$$\left[\frac{d}{dt}(r \times V)\right] \cdot x^0 = \alpha V_r (r \times x^0) \cdot x^0 = 0,$$

и, следовательно, $(r \times V)_{x^0} = \text{const}$.

6. Пусть до увеличения веса топлива характеристическая скорость ракеты равна

$$V_1 = V_r \ln \frac{M_T + M_K}{M_K},$$

где M_T — масса топлива, а M_K — конечная масса ракеты. Учитывая, что $\frac{M_T}{M_K} = z - 1$, найдем относительное изменение характеристической скорости

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\ln \left[1 + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{z} \right) \right]}{\ln z}.$$

Так как ε мало, то, раскладывая числитель в ряд и отбрасывая члены с ε^2 и выше, найдем

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\varepsilon(z-1)}{z \ln z} = \frac{0,05 \cdot 4}{5 \ln 5} \approx 2,5\%.$$

7. $\sim 62,1 T$.

8. Уравнения движения точки могут быть приведены к виду

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{K\xi}{\rho^3} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{K\eta}{\rho^3} = 0, \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля. В координатах ξ, η точка переменной массы описывает одну из кривых конического сечения.

Указание. От прямоугольных инерциальных координат x, y с началом в центре притяжения и времени t перейдите к новым координатам ξ, η и новому «времени» τ по формулам

$$\xi = \frac{x}{1 - \alpha t}, \quad \eta = \frac{y}{1 - \alpha t}, \quad \tau = \frac{t}{\alpha(1 - \alpha t)}.$$

9. $\ddot{y} = -g - \frac{\dot{m}}{m} V_r - \frac{R}{M_0 m}$, где g — ускорение силы тяжести,

10. Запишем дифференциальное уравнение предыдущей задачи в виде ($R=0$, так как атмосфера отсутствует)

$$\frac{dV}{dt} = -g_L - V_r \frac{d \ln f(t)}{dt},$$

где g_L — ускорение силы тяжести на поверхности Луны.

Интегрируя два раза, найдем

$$s = -\frac{g_L t^2}{2} + \frac{V_r}{\alpha} [\alpha t + (1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t)], \quad s = 28,5 \text{ км.}$$

$$11. H = \frac{z^2 V_r (\alpha V_r - g)}{2\alpha g}.$$

Указание. Полная высота подъема ракеты складывается из высоты активного участка, определяемой путем интегрирования уравнения движения предыдущей задачи с учетом заданного закона изменения массы, и высоты пассивного участка, определяемой по формуле $H_{\text{п}} = V_a^2/2g$, где V_a^2 — скорость в конце активного участка траектории.

Продолжительность полета на активном участке t_a можно связать с заданным числом Циолковского ракеты формулой

$$\alpha t_a = \ln \frac{M_0}{M} = z.$$

$$12. V = \beta \frac{1 - \frac{\beta - V_0}{\beta + V_0} (1 - \alpha t)^n}{1 + \frac{\beta - V_0}{\beta + V_0} (1 - \alpha t)^n}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\alpha V_r}{k}}, \quad n = \sqrt{\frac{k V_r}{\alpha}}.$$

13. В проекциях на естественные оси координат уравнения движения ракеты имеют вид

$$\frac{dV}{dt} = n - \cos \psi, \quad \frac{V}{g} \frac{d\psi}{dt} = \sin \psi,$$

где $n = \omega/g$. Поделив уравнения почленно друг на друга и переходя к переменной

$$\zeta = \text{tg} \frac{\psi}{2},$$

получим

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\zeta} = \frac{(n+1)\zeta^2 + (n-1)}{\zeta(\zeta^2 + 1)}.$$

Интегрируя и полагая в начальный момент $\zeta(0) = \zeta_0$, $V(0) = V_0$, найдем

$$V = V_0 \frac{\zeta^{n-1} (1 + \zeta^2)}{\zeta_0^{n-1} (1 + \zeta_0^2)}. \quad (*)$$

Связь между ζ и t найдется из интегрирования уравнения

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{g}{V} \zeta$$

с учетом соотношения (*). Интегрируя, получим

$$t = \frac{V_0 (\zeta^{n-1} - \zeta_0^{n-1})}{g \zeta_0^{n-1} (1 + \zeta_0^2)} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{\zeta^2 - \zeta_0^2}{n+1} \right).$$

14. Так как перегрузка n постоянна, то постоянно и реактивное ускорение ракеты, т. е. имеем случай движения, разобранный в предыдущей задаче. Воспользовавшись найденным соотношением между V и $\zeta = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$ и интегрируя уравнения

$$\frac{dL}{d\zeta} = \frac{V^2}{g} \sin \psi, \quad \frac{dH}{d\zeta} = \frac{V^2}{g} \cos \psi,$$

получим

$$H = H_0 + \frac{c^2}{2g(n^2 - 1)} [(n+1)(1 - \zeta_0^{2(n-1)}) - (n-1)(1 - \zeta_0^{2(n+1)})],$$

$$L = \frac{2c^2}{g(4n^2 - 1)} [(2n+1)(1 - \zeta_0^{2n-1}) + (2n-1)(1 - \zeta_0^{2n+1})],$$

где

$$c^2 = \frac{V_0^2}{\zeta_0^{2(n-1)}(1 + \zeta_0^2)^2}.$$

15. $L_a = \frac{2nV_a^2}{g(4n^2 - 1)}$, $H_a = \frac{V_a^2}{4g(n^2 - 1)}$, $n = \frac{w}{g}$. При $n=3$: $L_a = 1100$ км, $H_a = 200$ км.

У к а з а н и е. Используя решения задач 13, 14, преобразуйте формулы для дальности и высоты, полагая в них $\zeta = 1$ и учитывая зависимость

$$V_a = \frac{2V_0}{\zeta_0^n - 1(1 + \zeta_0^2)}.$$

16. При $\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = 1$ и $\operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} = 0$ для времени движения на активном участке t_a имеем (см. задачу 13)

$$t_a = \frac{nV_a}{g(n^2 - 1)}$$

Число Циолковского z найдется по формуле

$$z = \exp\left(\frac{V_a}{V_r} \frac{n^2}{n^2 - 1}\right).$$

Подставляя $V_a/V_r = 2$, получим

$$z_{n=2} = 14,4, \quad z_{n=3} = 9,49, \quad z_{n=4} = 8,42.$$

17. Связь между $n_{\text{Л}}$ и H дается формулой

$$H = \frac{R}{2} \left(\frac{n_{\text{Л}}}{\sqrt{n_{\text{Л}}^2 - 1}} - 1 \right),$$

где R — радиус Луны.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь решением задачи 13, полагая $n < n_{\text{Л}}$ и $\operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} = 1$. Высота селеноцентрической орбиты, обеспечивающая при заданном $n_{\text{Л}}$ мягкую посадку, найдется из условия $\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \rightarrow 0$.

§ 2

1. $z=5$.

2. $V = V_r \ln \frac{1+\alpha s}{1+\alpha}$.

У к а з а н и е. Для определения числа Циолковского воспользуйтесь формулой

$$\frac{P_1}{G} = \prod_{i=1}^n \frac{s_i - 1}{s_i - z_i} z_i$$

при $n=1$. Отношение P_1/G можно представить следующим образом:

$$\frac{P_1}{G} = \frac{G+Q+q}{G} = 1 + s\alpha.$$

3. Из формулы Циолковского следует, что при одинаковом отношении $V_{\text{хар}}/V_r$ для одноступенчатой и двухступенчатой ракет будут одинаковы и числа Циолковского z . Воспользовавшись формулой $s=(Q+q)/q$, найдем «сухой» вес одноступенчатой ракеты $q_1 \approx 49,75$ Т, а затем число Циолковского

$$z = \frac{P_1}{G+q} \approx 3,94.$$

Полный вес двухступенчатой ракеты найдется по формуле

$$P_2 = Gz \left(\frac{s-1}{s-\sqrt{z}} \right)^2 = 1 \cdot 3,94 \left(\frac{4-1}{4-\sqrt{3,94}} \right)^2 \approx 8,6$$
 Т.

4. $P_2 \approx 15,1$ Т.

5. Полный вес ракеты находится по формуле

$$P_1 = G \exp \frac{V_{\text{хар}}}{V_r} \left(\frac{s-1}{s - \exp \frac{V_{\text{хар}}}{nV_r}} \right)^n \approx 37,6$$
 Т.

6. Вместе с полезным грузом скорость $V_a = 8$ км/сек приобретает также и сухой вес последней (четвертой) ступени, который равен

$$q_4 = G \frac{\sqrt[4]{\lambda} - 1}{S} \approx 139$$
 кг.

Общий вес частей ракеты, приобретающих первую космическую скорость, составит

$$G + q_4 \approx 639$$
 кг.

7. $V_{\text{хар}} \approx 8890$ м/сек, $q_3 + G \approx 60,3$ кг.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой, определяющей число Циолковского каждой ступени z_i через относительные веса ступеней λ_i и их конструктивные характеристики s_i :

$$z_i = \frac{\lambda_i s_i}{\lambda_i + s_i - 1} \quad (i=1, 2, 3).$$

8. $V_{\text{хар}} \approx 5206$ м/сек, $P_2 = 14,1$ Т.

У к а з а н и е. Для нахождения относительного веса всей ракеты воспользуйтесь формулой, связывающей конструктивную характеристику и число Циолковского i -й ступени с ее относительным весом.

9. $q_1 \approx 1500$ кг, $q_2 \approx 520$ кг, $Q_1 + Q_2 = 15,5$ Т.

У к а з а н и е. Вес топлива Q_i -й ступени найдется по формуле

$$Q_i = \frac{z_i - 1}{z_i} P_i \quad (i = 1, 2).$$

Затем можно определить «сухой» вес каждой ступени по формуле

$$s_i = \frac{Q_i + q_i}{q_i}.$$

10. $s = 8,46$.

§ 3

1. Так как $\dot{V} = Q = 0$, то

$$\rho = \frac{g}{V_r}, \quad q = 0.$$

Подставляя ρ и q в формулу (9.3.1), находим

$$m = c \exp\left(-\frac{gt}{V_r}\right).$$

Полагая $m = 1$ при $t = 0$, получаем

$$M = M_0 \exp\left(-\frac{gt}{V_r}\right).$$

2. $M = M_0 \exp\left(-\frac{a+g}{V_r} t\right)$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой (9.3.1).

3. Поскольку скорость ракеты постоянна, то $q = kV^2/V_r$ — также постоянная. Используя формулу (9.3.1) и полагая $M = M_0$ при $t = 0$, получим закон изменения массы ракеты:

$$M = M_0 \left\{ \exp\left(-\frac{gt}{V_r}\right) - \frac{kV^2}{V_r} \left[1 - \exp\left(-\frac{gt}{V_r}\right) \right] \right\}.$$

4. $M = M_0 \exp\left[\frac{g}{V_n(\cos t - 1)}\right]$, $\frac{N}{M_0} = \frac{1 - 2bg \cos^4 t}{2b \cos^3 t} \exp\left[\frac{g}{V_n(\cos t - 1)}\right]$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь проекциями основного векторного уравнения движения (9.3.4) на оси x , y :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg - Q \sin \vartheta - \dot{m} V_r \sin \vartheta - \frac{N}{M_0} \cos \vartheta, \\ m\ddot{y} &= -Q \cos \vartheta - \dot{m} V_r \cos \vartheta + \frac{N}{M_0} \sin \vartheta, \end{aligned}$$

где ϑ — угол наклона траектории к горизонту. Так как $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx}$, то

$$\sin \vartheta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \cos \vartheta = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

5. $\alpha = \infty$ (мгновенное сжигание всего запаса топлива), $H_{\max} = \frac{(V_0 + V_r z)^2}{2g}$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой для высоты H_{\max} , полученной в задаче 9.1.11. Оптимальное значение α определяется из условия $\frac{\partial H_{\max}}{\partial \alpha} = 0$.

6. Обозначая через β угол между радиусом-вектором ракеты и вектором реактивного ускорения, запишем дифференциальные уравнения движения ракеты в полярных координатах:

$$\omega \cos \beta = \frac{K}{r^2} + \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$

$$\omega \sin \beta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}),$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля.

Отсюда с учетом параметрических уравнений траектории получим программу изменения угла β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\rho\omega^2}{\omega},$$

где

$$\omega = \sqrt{\left[\frac{K - \rho^3 \omega^2 (\varphi_0 + \omega t)^3}{\rho^2 (\varphi_0 + \omega t)^2} \right]^2 + 4\rho^2 \omega^4}.$$

Закон изменения массы ракеты найдем, интегрируя уравнение

$$M\dot{a} = -V_r \dot{M},$$

что дает

$$M(t) = M_0 \exp \left[\frac{1}{V_r} \int_0^t \omega(t) dt \right].$$

7. Из кинематических уравнений

$$\dot{r} = -V_0 \cos \alpha, \quad r\dot{\varphi} = V_0 \sin \alpha, \quad (*)$$

полагая $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, находим

$$r = r_0 - V_0 \cos \alpha t, \quad (**)$$

или, переходя от времени t к полярному углу φ , получим

$$r = r_0 \exp \{(\varphi_0 - \varphi) \operatorname{ctg} \alpha\}. \quad (***)$$

Таким образом, траекторией ракеты является логарифмическая спираль.

Из дифференциальных уравнений движения в полярных координатах находим проекции реактивного ускорения на радиус-вектор и трансверсаль:

$$\omega_r = \frac{K}{r^2} + \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}),$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля. Используя (*) и (**), получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r V_0^2 \sin^2 \alpha - K}, \quad \omega = \frac{1}{r^2} \sqrt{(K - r V_0^2 \sin^2 \alpha)^2 + (r V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha)^2},$$

где β — угол между радиусом-вектором r и вектором реактивного ускорения ω .

При постоянной скорости истечения V_r запас топлива ракеты M_T определится по формуле

$$M_T = M_0 \left\{ \exp \left[-\frac{1}{V_r} \int_0^{t_1} \omega dt \right] - 1 \right\},$$

где

$$t_1 = \frac{r_0 - r_1}{V_0 \cos \alpha}.$$

Приравнявая производную от величины M_T по α нулю, найдем условие, которому должно удовлетворять α_{opt} :

$$\omega(t_1) \frac{r_1 - r_0}{V_0} \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{V_r} \int_0^{t_1} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} dt = 0.$$

8. Уравнения движения спускаемого аппарата в безразмерных полярных координатах будут

$$\ddot{r} - r = -\frac{1}{r^2}, \quad \dot{r} = -\omega_\varphi, \quad \omega_\varphi = -\frac{V_r}{M} \frac{dM}{dt}. \quad (*)$$

Интегрируя первое уравнение, найдем

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{r} (r^3 + 2hr + 2), \quad (**)$$

где h — «полная энергия» одномерного движения. Так как при $t=0$ имеем $\dot{r}_0=0$, $r_0=1$, то $h=-3/2$. Вводя новую независимую переменную

$$\tau = \int \sqrt{\frac{2}{r}} dt,$$

уравнение (**) можно упростить:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{Q(r)}, \quad Q(r) = r^3 - 3r + 2. \quad (***)$$

Значение $r_0=1$ является кратным корнем многочлена $Q(r)$, так как первая производная

$$\frac{dQ}{dr} = 3(r^2 - 1),$$

так же как и $Q(r)$, обращается в нуль при $r=r_0$. Поделив $Q(r)$ на $(r-1)^2$, найдем третий корень: $r_1=-2$. Интегрируя (***), получим

$$\tau = \int_1^r \frac{dr}{(r-1)\sqrt{r+2}}, \quad r = 1 - \sqrt{3} \operatorname{th} \frac{2\sqrt{3}\tau}{3}.$$

Из двух последних уравнений (*) имеем

$$\frac{dM}{M} = \frac{2dr}{V_r}.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом полученной зависимости $r=r(\tau)$, найдем

$$M = \exp \left(-2 \sqrt{\frac{3}{r}} \operatorname{th} \frac{2\sqrt{3}\tau}{3} \right).$$

9. Поместим в центр планеты жестко связанную с ней систему координат x, y, z , направив ось z по оси вращения планеты. Плоскость x, z совместим с плоскостью орбиты спутника. При равномерном обращении спутника уравнение его движения в векторной форме будет

$$-\omega^2 r = \omega - \left[\frac{K}{r^3} r + \omega_0 \times \omega_0 \times r + 2\omega_0 \times \omega \times r \right],$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля. Направим угловую скорость спутника ω по оси y , а угол ωt будем отсчитывать от оси z в сторону обращения спутника. Проектируя уравнение на оси x, y, z , найдем проекции ускорения $\omega_x, \omega_y, \omega_z$:

$$\omega_x = \frac{K}{r^2} - (\omega^2 + \omega_0^2) r \sin \omega t,$$

$$\omega_y = 2\omega\omega_0 r \cos \omega t,$$

$$\omega_z = \left(\frac{K}{r^2} - \omega^2 r \right) \sin \omega t.$$

Для модуля ускорения получим

$$\omega = \sqrt{p^2 \cos^2 \omega t + q^2 \sin^2 \omega t},$$

где

$$p = \frac{K}{r^2} - r(\omega^2 + \omega_0^2), \quad q = \sqrt{4\omega^2\omega_0^2 r^2 + \left(\frac{K}{r^2} - \omega^2 r\right)^2}.$$

Введем параметр k по формуле

$$k^2 = 1 - \frac{q^2}{p^2}.$$

Тогда выражение для модуля ускорения ω приводится к виду

$$\omega = |p| \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega t}.$$

При постоянной скорости истечения V_r закон изменения массы спутника $M(t)$ имеет вид

$$M(t) = M_0 \exp \left[\frac{1}{V_r} \int_0^t \omega dt \right] = M_0 \exp \left[\frac{|p|}{\omega V_r} E(k, \omega t) \right],$$

где $E(k, \omega t)$ — эллиптический интеграл второго рода.

10. Из решения предыдущей задачи видно, что модуль реактивного ускорения ω будет постоянным, если $k=0$, т. е. $p=q$. Раскрывая полученное равенство, найдем, что $\omega = |p|$, если между ω, ω_0 и r выполняется соотношение

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{K}{r^3}.$$

Минимальное значение r найдем из условия

$$\frac{\omega_0^2}{2} = \frac{K}{r^3}.$$

Для Земли получим

$$r_{\min} \approx 8,33R,$$

где R — радиус Земли.

11. $M = M_0 \exp\left(\sqrt[3]{\frac{4K\omega_0^4}{V_r} t}\right)$, $r \approx 10,5R$. Вектор реактивного ускорения вращается в плоскости, параллельной экваториальной с угловой скоростью $\omega_0/2$.

У к а з а н и е. Используйте решение предыдущей задачи.

12. При постоянной величине ускорения ω между r , ω_0 и угловой скоростью обращения спутника ω должно выполняться соотношение (см. задачу 10)

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{K}{r^3},$$

где K — гравитационный параметр планеты. При указанном условии величина ускорения ω найдется по формуле

$$\omega = \left| \frac{2K}{r^2} - \frac{3}{2} \omega_0^2 r \right|.$$

Для числа Циолковского z имеем

$$\ln z = \frac{\omega t}{V_r},$$

где $t = 2\pi N/\omega$ — время работы двигателя. Исследуя на экстремум функцию

$$f(r) = \left(\frac{2K}{r^2} - \frac{3\omega_0^2 r}{2} \right) \left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{K}{r^3} \right)^{1/2},$$

найдем, что при

$$r_{\text{opt}}^3 = \frac{8K}{\omega_0^2 (\sqrt{97} - 7)}$$

$f(r)$, а следовательно и число Циолковского, достигает максимального значения. Для Земли получим

$$r_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{8R^2 g}{\omega_0^2 (\sqrt{97} - 7)}} \approx 9,28R,$$

где R — радиус Земли.

13. Оптимального угла наклона траектории не существует.

У к а з а н и е. Используя решение задачи 9.1.13, исследуйте на экстремум функцию

$$t = V_0 \frac{(n+1)(z^{n+1} - z_0^{n+1}) + (n-1)(z^{n+1} - z_0^{n+1})}{g z^{n-1} (1 + z_0^2) (n^2 - 1)}$$

при $z=1$ и $z=3$. Экстремальные значения z_0 являются корнями уравнения

$$z_0^4 - 6z_0^2 - 3 = 0,$$

которые лежат вне интервала $0 \leq z_0 < 1$, где может изменяться z_0 по физическому смыслу задачи.

14. Минимум z достигается на орбите, бесконечно близкой к поверхности Луны и при мгновенном сжигании всего запаса топлива (бесконечно большая тяга):

$$z = \exp \left[\frac{V_1}{V_r} \frac{1 + 4 \left(1 + \frac{H}{R} \right) \frac{H}{R}}{\sqrt{1 + \frac{H}{R}}} \right], \quad z_{\min} = \exp \frac{V_1}{V_r} \approx 1,27,$$

где V_1 — первая космическая скорость на поверхности Луны, R — радиус Луны.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь уравнениями движения задачи 9.1.13, полагая в них $\operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} = 0$ и $n = -\omega/g_{\text{Л}}$. Тогда время движения найдется по формуле

$$t = -\frac{nV_0}{g_{\text{Л}}(n^2 - 1)},$$

где $g_{\text{Л}}$ — ускорение силы тяжести на поверхности Луны, а V_0 — круговая скорость на селеноцентрической орбите. Аналогично определится высота круговой орбиты при условии мягкой посадки. Используя еще связь между высотой орбиты и первой космической скоростью, получим соотношение между H и n при условии мягкой посадки:

$$n^2 - 1 = \frac{1}{4 \left(1 + \frac{H}{R}\right) \frac{H}{R}},$$

где R — радиус Луны. С помощью написанных соотношений найдем число Циолковского в функции H :

$$z = \exp\left(\frac{nV_0^2 t}{RV_r}\right).$$

15. Применяя принцип Даламбера, получим (см. рис. 9.2)

$$\omega - \frac{K}{r^3} r - \omega \times V = 0,$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля.

Проектируя написанное векторное уравнение на радиус-вектор r и направление, перпендикулярное к нему в плоскости r, ω , получим

$$\omega \sin(\varphi - \psi) = \frac{K}{r^2} - \omega^2 r \cos^2 \varphi,$$

$$\omega \cos(\varphi - \psi) = r\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Возводя каждое из написанных уравнений в квадрат и складывая, найдем ω

$$\omega = \sqrt{\frac{K^2}{r^4} + \left(\omega^2 r - \frac{2K}{r^2}\right) \omega^2 r \cos^2 \varphi}.$$

Из условия $\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$ определим значение r_{\min} , минимизирующее величину

$$r_{\min}^3 = \frac{K}{2\omega^2} \left(\sqrt{1 + \frac{8}{\cos^2 \varphi}} - 1 \right).$$

16. При постоянной скорости истечения V_r число оборотов спутника N найдется по формуле

$$N = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{\omega \ln V_r}{2\pi\omega} \ln z,$$

где t — полное время работы двигателя, ω — величина реактивного ускорения. Оптимальное значение ω определится из условия

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\omega}{\omega} \right) = 0.$$

Используя решение предыдущей задачи, найдем

$$\omega^2 = \frac{K}{r^3 \cos^3 \varphi}.$$

Подставляя полученное значение ω в выражение для модуля ускорения, получим

$$\omega = \frac{2K}{r^2} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

17. Спроектируем векторное уравнение (см. решение задачи 15)

$$\omega - \frac{K}{r^3} r - \omega \times V = 0,$$

где ω — угловая скорость спутника на орбите, а K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля на направление, перпендикулярное вектору ω . Получим

$$r\omega^2 \cos \psi - \frac{K}{r^2} \cos(\varphi - \psi) = 0.$$

Чтобы спутник находился над одной и той же точкой планеты, его угловая скорость ω должна быть равна угловой скорости планеты. Радиус r_* круговой орбиты такого спутника, находящегося в экваториальной плоскости (суточный экваториальный спутник), равен

$$r_* = \sqrt[3]{\frac{K}{\omega^2}}.$$

После несложных преобразований найдем

$$\left(\frac{r}{r_*}\right)^3 = 1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi.$$

Так как скорость истечения постоянна, то минимальный расход топлива будет при минимальной величине ускорения ω . При заданных значениях φ и ω минимуму ускорения соответствует значение r_{\min} , равное (см. задачу 15)

$$\left(\frac{r_{\min}}{r_*}\right)^3 = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 \sec^2 \varphi} - 1).$$

Приравнивая правые части двух последних уравнений, найдем

$$\operatorname{tg} \psi_{\text{opt}} = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 \sec^2 \varphi} - 3) \operatorname{ctg} \varphi.$$

При малых φ , разлагая $\operatorname{tg} \psi_{\text{opt}}$ в ряд по степеням φ и ограничиваясь первым членом разложения, найдем

$$\psi_{\text{opt}} = \frac{2}{3} \varphi.$$

Г Л А В А X

§ 1

1. Так как реактивное ускорение ω все время направлено по радиусу-вектору, то силовое поле является центральным, а движение аппарата плоским. В полярных координатах r, φ лагранжиан задачи имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{K}{r} + \omega r,$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля.

Уравнения движения с учетом начальных условий $r(0) = r_0$, $V_0^2 = K/r_0$ имеют два первых интеграла: интеграл площадей

$$r^2 \dot{\varphi} = r_0 V_0$$

и интеграл энергии

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{K}{r} - \omega r = -\frac{K}{2r_0} - \omega r_0.$$

Исключая из последнего соотношения $\dot{\varphi}^2$ с помощью интеграла площадей, найдем

$$r \dot{r} = \sqrt{2 \left[\omega r^3 - \left(\frac{K}{2r_0} + \omega r_0 \right) r^2 + Kr \right] - V_0^2 r_0^2}.$$

Поделив полученное уравнение на $V_0 r_0$ и имея в виду, что K/r_0^2 есть гравитационное ускорение на исходной круговой орбите, будем иметь

$$r_* \dot{r}_* = \sqrt{2 \left[\omega_* r_*^3 - \left(\omega_* + \frac{1}{2} \right) r_*^2 + r_* \right] - 1},$$

где звездочкой обозначены безразмерные переменные. Так как в начальный момент $r_* = 1$, $\dot{r}_* = 0$, то $r_* = 1$ является корнем многочлена

$$f(r_*) = \omega_* r_*^3 - \left(\omega_* + \frac{1}{2} \right) r_*^2 + r_* - \frac{1}{2}.$$

Поделив $f(r_*)$ на $r_* - 1$, найдем корни $\alpha_{1,2}$ оставшегося квадратного трехчлена

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\omega_*}}{4\omega_*}.$$

Движение становится инфинитным, как только корни $\alpha_{1,2}$ будут комплексно-сопряженными, т. е. при $\omega_* > 1/8$. В этом случае многочлен $f(r_*)$ может принимать неотрицательные значения только при $1 \leq r_* < \infty$.

2. Полная механическая энергия космического аппарата равна

$$E = \frac{V^2}{2} - \frac{K}{r} - \omega r,$$

где V — скорость. Так как в начальный момент орбита круговая, то $V_0^2 = K/r_0$ и, следовательно,

$$\frac{V^2}{2} - \frac{K}{r} - \omega r = -\frac{K}{2r_0} - \omega r_0.$$

Если при $r = r_1$ космический аппарат приобретает вторую космическую скорость, то, исключая из написанного соотношения $V_1^2 = 2K/r_1$, найдем

$$r_1 = \frac{K}{2r_0 \omega} + r_0 = 3r_0.$$

3. $\omega_{\min} = 0,656 \cdot 10^{-3}$ м/сек.

У к а з а н и е. Если движение финитно, то максимально достижимое расстояние r_{\max} определяется по формуле

$$r_{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 - 8\omega}}{4\omega}$$

(см. решение задачи 1), и, следовательно, ускорение ω , выраженное в единицах гравитационного солнечного ускорения, на исходной гелиоцентрической орбите будет равно

$$\omega = \frac{r-1}{2r^2}.$$

4. В полярных координатах уравнения движения космического аппарата:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= -\frac{K}{r^2}, \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} &= \omega_{\varphi}. \end{aligned}$$

Исключая из второго уравнения $\dot{\varphi}$, получим

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{Kr^3\ddot{r} + r}) = \frac{r\omega_{\varphi}}{K}.$$

Пренебрегая величиной $\ddot{r}r^3$ и интегрируя при начальных условиях $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$, найдем

$$r = \frac{r_0}{\left(1 - \frac{\omega_{\varphi} r_0}{\sqrt{Kr_0}} t\right)^2}. \quad (*)$$

Подставляя полученное выражение вместе с его второй производной в первое уравнение исходной системы, будем иметь

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{K}{r_0^3}} \left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{K}} \omega_{\varphi} t\right)^3.$$

Интегрируя и исключая время с помощью (*), получим уравнение траектории

$$r^2 = K \left(\frac{K}{r_0^2} - 4\omega_{\varphi}\varphi\right)^{-1}.$$

5. Уравнение движения космического аппарата в проекции на касательную к траектории можно записать в виде

$$V \frac{dV}{ds} = \omega_{\tau} - \frac{K}{r^2} \frac{dr}{ds},$$

где ds — элемент дуги, V — скорость космического аппарата, K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля. Интегрируя, найдем

$$\frac{V^2}{2} = \frac{K}{r} + \omega_{\tau}s - \frac{K}{2r_0}.$$

В точке приобретения параболической скорости имеем $V^2 = 2K/r$, что после подстановки в последнее соотношение дает искомую длину дуги:

$$s = \frac{K}{\omega_{\tau}r_0}.$$

6. Уравнение движения космического аппарата в проекции на касательную к траектории имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{K}{r^2} \sin \vartheta,$$

где r — модуль радиуса-вектора, проведенного из центра притяжения, V — скорость, K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля, ϑ — угол, который образует скорость с трансверсалью. Используя кинематическое соотношение

$$\dot{r} = V \sin \vartheta,$$

получим

$$V \frac{dV}{dt} - \frac{K}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{K}{r} \right) = 0.$$

Таким образом имеем интеграл

$$\frac{V^2}{2} - \frac{K}{r} = E_0.$$

Так как начальная орбита эллиптическая, то $E_0 = -K/(2a)$ (где a — большая полуось начальной орбиты), и для r имеем уравнение

$$\frac{K}{r} = \frac{V^2}{2} + \frac{K}{2a},$$

откуда следует, что r не может принимать бесконечно больших значений.

$$7. \text{ а) } \quad \operatorname{tg} \lambda = - \frac{\sin v (1 + e \cos v)}{e \cos^2 v + 2 \cos v + e},$$

$$\text{б) } \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin v (1 + e \cos v)}{-e \cos^2 v - 2 \cos v + 2 + e}.$$

Указание. Так как модуль ускорения мал, то скорость изменения указанных элементов можно определить из уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах (см. § 2 гл. VIII):

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{K}} \left(\omega_r \sin v + \omega_\varphi \frac{e \cos^2 v + 2 \cos v + e}{1 + e \cos v} \right),$$

$$\frac{dr_p}{dt} = \frac{p}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{p}{K}} \left[\omega_r \sin v + \omega_\varphi \frac{e \cos^2 v + 2 \cos v + 2 - e}{1 + e \cos v} \right],$$

где K — гравитационный параметр притягивающего центра, r_p — расстояние до перигея, p , e — соответственно параметр и эксцентриситет оскулирующей орбиты, ω_r и ω_φ — проекции малого реактивного ускорения на радиальное и трансверсальное направления, которые можно выразить через угол λ и модуль ω реактивного ускорения:

$$\omega_r = \omega \cos \lambda, \quad \omega_\varphi = \omega \sin \lambda.$$

$$8. \text{ а) } \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{V_\varphi}{V_r} \frac{r V_\varphi^2 - 1}{r V_\varphi^2 + 1},$$

$$\text{б) } \quad \operatorname{tg} \lambda = - \frac{V_r}{V_\varphi} \frac{r V_\varphi^2 + 1}{r V_\varphi^2 - 1}.$$

Указание. а) См. решение предыдущей задачи; б) скорость изменения положения линии апсид определяется уравнением

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{K}} \left[-\omega_r \cos v + \omega_\varphi \frac{\sin v (2 + e \cos v)}{1 + e \cos v} \right],$$

где ω — угловое расстояние перигея до узла, K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля, p и e — параметр и эксцентриситет

оскулирующей орбиты, $\omega_r = \omega \cos \lambda$ и $\omega_\varphi = \omega \sin \lambda$ — проекции реактивного ускорения ω на радиус-вектор и трансверсаль соответственно. Программа изменения λ для максимальной скорости вращения линии апсид найдется из условий

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial \lambda^2} > 0.$$

9. а) По нормали к траектории, б) по радиусу-вектору.

У к а з а н и е. Используя уравнение в оскулирующих элементах (см. решение задачи 7) для случая б), получим следующий закон изменения угла λ :

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{e \sin v}{1 + e \cos v}.$$

С другой стороны, из теории кеплеровского движения имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v},$$

где ϑ — угол между вектором скорости и трансверсалью.

10. а) По касательной к траектории, б) по трансверсали.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь уравнениями в оскулирующих кеплеровских элементах, а также зависимостью угла между скоростью и трансверсалью ϑ от истинной аномалии в кеплеровском движении (см. решение предыдущей задачи).

11. Из системы уравнений в оскулирующих кеплеровских элементах следует, что уравнение для любого из четырех кеплеровских элементов ε_i (большой полуоси, фокального параметра, эксцентриситета, аргумента перицентра) можно записать в виде

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \frac{w}{\sqrt{K}} [\varphi_i(v) \cos \lambda + \psi_i(v) \sin \lambda] \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля, w — модуль реактивного ускорения, λ — угол между вектором ускорения и радиусом-вектором аппарата, проведенным из центра притяжения, $\varphi_i(v)$ и $\psi_i(v)$ — известные функции истинной аномалии v космического аппарата.

Из условия $\dot{\varepsilon}_i = 0$ находим программу изменения, обеспечивающую постоянство элемента ε_i :

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = -\frac{\varphi_i(v)}{\psi_i(v)}.$$

Приравняв нулю частную производную

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}_i}{\partial \lambda} = \frac{w}{\sqrt{K}} [-\varphi_i(v) \sin \lambda + \psi_i(v) \cos \lambda],$$

найдем программу изменения λ , обеспечивающую максимальную скорость изменения рассматриваемого элемента ε_i :

$$\operatorname{tg} \lambda_2 = \frac{\psi_i(v)}{\varphi_i(v)}.$$

Сопоставляя выражения для λ_1 и λ_2 , получаем

$$\operatorname{ctg} \left(\lambda_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{ctg} \lambda_2.$$

12. Уравнения движения парусника в проекциях на касательную и нормаль к траектории при движении по круговой орбите будут

$$\dot{V} = w_0 \cos^3 \alpha, \quad \frac{V^2}{r_0} = \frac{w_0}{r_0^2} \sin \alpha - \frac{K}{r_0^2}.$$

Дифференцируя второе из уравнений движения по времени и исключая \dot{V} с помощью первого из них, найдем

$$\dot{\alpha} = \frac{2V}{3r_0}.$$

Дифференцируя последнее соотношение по времени и опять исключая \dot{V} , получим дифференциальное уравнение, определяющее закон изменения угла установки паруса α :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2w_0}{3r_0} \sin \alpha.$$

Решая это уравнение в предположении, что $\alpha(0) = 0$, $\dot{\alpha}(0) = \frac{2V_0}{3r_0} = \frac{2\omega_0}{3}$, найдем закон изменения $\alpha(t)$:

$$t = \frac{3}{2} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\omega_0 \sqrt{1 - w_0^* \sin^3 \alpha}},$$

где w_0^* — отношение радиационного ускорения w_0 к гравитационному ускорению на круговой орбите радиуса r_0 .

$$13. \alpha = -\varphi, \quad S = \frac{w}{A_0} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sec \varphi.$$

У к а з а н и е. Проекция радиационного ускорения на радиус-вектор и трансверсаль соответственно будут

$$w_r = A_0 S \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos^2 \alpha, \quad w_\varphi = A_0 S \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha,$$

где R — радиус гелиоцентрической орбиты Земли, A_0 — радиационное ускорение, приходящееся на единицу площади, нормально ориентированной к солнечным лучам и находящейся на расстоянии R от Солнца. Ось отсчета угла α направьте параллельно постоянному вектору w .

14. Пусть при $t = 0$

$$V(0) = V_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0.$$

Тогда

$$\dot{r} = \dot{r}_0, \quad \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \dot{r}_0.$$

Так как $\dot{\varphi} = r_0 \dot{\varphi}_0 / r$, то приходим к уравнению

$$\frac{dr}{r} = \frac{\dot{r}_0}{r_0 \dot{\varphi}_0} d\varphi,$$

интегрируя которое, получим уравнение траектории парусника

$$r = r_0 \exp \left[\frac{\dot{r}_0}{r_0 \dot{\varphi}_0} (\varphi - \varphi_0) \right].$$

Из выражений для радиальной w_r и трансверсальной w_φ составляющих ускорения

$$w_r = w_0 S \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cos^3 \vartheta, \quad w_\varphi = w_0 S \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta$$

найдем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{w_\varphi}{w_r}, \quad S = \frac{1}{w_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{w_\varphi}{w_r}\right)^2\right]^{3/2}.$$

Используя полученное уравнение траектории, а также связь w_r и w_φ с r и φ :

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi},$$

будем иметь

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{r\dot{\varphi}}{K - r_0^2 \dot{\varphi}_0^2}, \quad S = \frac{[(K - r_0^2 \dot{\varphi}_0^2)^2 + r_0^2 r^2 \dot{\varphi}_0^2]^{3/2}}{w_0 r_0^2 (K - r_0^2 \dot{\varphi}_0^2)}.$$

15. Следует вычислить величину a по формуле

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{fM_C m}{fM_C m r - p r^3}.$$

Если $a > 0$, то орбита — эллипс и аппарат будет через равные промежутки времени возвращаться в точку N . В остальных случаях аппарат будет неограниченно удаляться от Солнца.

16. Пусть перелет совершается по полуэллипсу AB (рис. P. 10.1): $SA = r_0 = 150 \cdot 10^6$ км, $SB = r_1 = 228 \cdot 10^6$ км, $V_0 = 29,8$ км/сек, $fM_C = 132,5 \cdot 10^9$ км³/сек² (здесь M_C — масса Солнца). Ясно, что

$$a = 189 \cdot 10^6 \text{ км},$$

$$K = \frac{V_0^2}{2} - \frac{1}{a} = 11 \cdot 10^{10} \text{ км}^3/\text{сек}^2.$$

Поэтому

$$S = m \frac{fM_C - K}{\alpha r_0^2} = 111\,000 \text{ м}^2.$$

Масса паруса составит около 220 кг.

17. $\ddot{w} = -\frac{Kw}{r^3}$, где $K = fM_C - \frac{\alpha r_0^2 S}{m} \cos^2 \varphi \cdot e^{i\varphi}$. Здесь w — комплексная координата аппарата (в качестве начала координат выбран центр Солнца), $r = |w|$, S — площадь паруса, m — его масса, φ — угол между нормалью к плоскости паруса и направлением солнечных лучей, M_C — масса Солнца.

18. Уравнение спирали в комплексной форме имеет вид

$$w = r_0 e^{(c+i)\vartheta}, \quad |w| = r = r_0 e^{c\vartheta} \quad (c \neq 0).$$

Покажем, что можно так подобрать функцию $\vartheta = \vartheta(t)$ и константу c , чтобы функция $w(\vartheta)$ удовлетворяла уравнению движения. Представляя в показательной форме число K : $K = |K| e^{i\beta}$, перепишем уравнение движения в виде

$$\ddot{w} = -|K| e^{i(\vartheta+\beta)}/r^2.$$

Из уравнения спирали следует, что

$$\begin{aligned} \dot{w} &= r_0 \dot{\vartheta} (c+i) e^{(c+i)\vartheta}, \\ \ddot{w} &= r_0 (c+i) \dot{\vartheta}^2 + (c+i) \ddot{\vartheta} e^{(c+i)\vartheta}. \end{aligned}$$

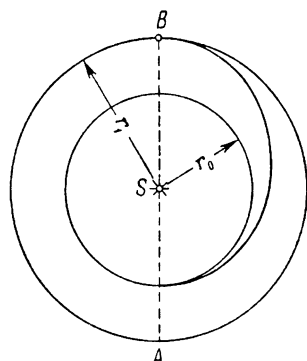


Рис. P. 10.1

С помощью последних соотношений из уравнения движения получим

$$r_0^3 e^{3c\vartheta} [(c+i)^2 \dot{\vartheta}^2 + (c+i) \ddot{\vartheta}] = -|K| e^{i\beta}.$$

Приравнявая соответственно вещественные и мнимые части обеих частей последнего равенства, получим

$$\left. \begin{aligned} r_0^3 e^{3c\vartheta} [(c^2-1) \dot{\vartheta}^2 + c \ddot{\vartheta}] &= -|K| \cos \beta, \\ r_0^3 e^{3c\vartheta} [2c \dot{\vartheta}^2 + \ddot{\vartheta}] &= -|K| \sin \beta. \end{aligned} \right\} (*)$$

Искомая функция $\vartheta(t)$ должна удовлетворять обоим последним уравнениям. Умножая второе из них на c и вычитая затем из него первое, получим уравнение

$$r_0^3 e^{3\vartheta} \dot{\vartheta}^2 (c^2+1) = |K| (\cos \beta - c \sin \beta), \quad (**)$$

откуда

$$e^{3c\vartheta} \dot{\vartheta}^2 = D,$$

где

$$D = |K| \frac{\cos \beta - c \sin \beta}{r_0^3 (c^2+1)}.$$

Ясно, что уравнение (**) имеет решение лишь в том случае, когда

$$\cos \beta - c \sin \beta \geq 0.$$

При таком дополнительном ограничении из (**) следует

$$\frac{3c\vartheta}{e^2} \dot{\vartheta} = \delta,$$

где

$$\delta = \pm \sqrt{D}.$$

Пусть $\vartheta=0$ при $t=t_0$. В таком случае

$$\left. \begin{aligned} e^{\frac{3c\vartheta}{2}} - 1 &= \frac{3}{2} c\delta (t-t_0), \\ \vartheta &= \frac{2}{3c} \ln \left[1 + \frac{3}{2} c\delta (t-t_0) \right]. \end{aligned} \right\} (***)$$

Умножая обе части предпоследнего равенства на $r_0^{3/2}$, найдем

$$r^{3/2} - r_0^{3/2} = \frac{3}{2} c r_0^{3/2} \delta (t-t_0).$$

Функция (***) является решением уравнения $e^{3c\vartheta} \dot{\vartheta}^2 = D$. Но она не всегда будет удовлетворять исходным уравнениям (*).

Выясним, при какой же зависимости между параметрами функция (***) будет удовлетворять также обоим уравнениям (*).

Так как $\dot{\vartheta} = \delta e^{\frac{3c\vartheta}{2}}$, то

$$\vartheta = \delta e^{\frac{3c\vartheta}{2}} \left(-\frac{3c}{2} \right) \dot{\vartheta} = -\frac{3}{2} c D e^{-3c\vartheta}.$$

Подставляя эти значения для $\dot{\vartheta}$ и $\ddot{\vartheta}$ в (*), получим

$$c (\cos \beta - c \sin \beta) = -2 (c^2 + 1) \sin \beta,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{c}{c^2 + 2}.$$

Таким образом, функция (***) удовлетворяет уравнению (*) в том и только том случае, когда β и c связаны последним соотношением.

Нетрудно показать, что вещественная и мнимая части числа K равны соответственно

$$K_1 = fM - \frac{\alpha r_0^2}{m} S \cos^3 \varphi, \quad K_2 = -\frac{\alpha r_0^2}{m} S \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

Ясно, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{K_2}{K_1}.$$

Таким образом, спираль $r = r_0 e^{c\vartheta}$ может оказаться орбитой корабля с солнечным парусом лишь в том случае, когда константа c и угол ориентации паруса φ связаны зависимостью

$$\alpha r_0^2 S \cos^2 \varphi \sin \varphi = \frac{c}{c^2 + 2} (fMm - \alpha r_0^2 S \cos^3 \varphi).$$

§ 2

1. Величина необходимого импульса скорости ΔV будет

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 - 2 \frac{V}{V_0} \cos \vartheta},$$

где V_0 — скорость на исходной круговой орбите, V — скорость на заданной эллиптической орбите в точке приложения импульса, ϑ — угол между скоростью и трансверсалью, определяемый по формуле

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v},$$

где v — истинная аномалия спутника.

Скорость V при движении по эллиптической орбите можно представить в виде

$$V^2 = \frac{K (1 + 2e \cos v + e^2)}{r (1 + e \cos v)},$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля, а r — радиус-вектор точки приложения импульса. Учтывая, что $V_0^2 = K/r$, после несложных преобразований получим

$$\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{1 + e \cos v} - \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}.$$

Приравнявая нулю производную

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\Delta V}{V_0}\right) = 0,$$

найдем экстремальные точки

$$v = 0, \quad v = \pi.$$

При $v=0$ и $v=\pi$ величина ΔV достигает минимума

$$\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)_{v=0}^2 = 2(1 - \sqrt{1+e}) + e,$$

$$\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)_{v=\pi}^2 = 2(1 - \sqrt{1-e}) - e.$$

Сравнивая полученные значения ΔV по модулю, заключаем, что абсолютного минимума ΔV достигает при $v=0$, т. е. в перигенте эллиптической орбиты.

2. В перигенте; $\frac{\Delta V_{\min}}{V_0} = 3 - \sqrt{2}$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь решением предыдущей задачи при $e=1$.

3. Из интеграла энергии имеем

$$\frac{V_\infty^2}{2} = \frac{(V + \Delta V)^2}{2} - \frac{K}{r},$$

где K — гравитационный параметр притягивающего центра, а r , V — соответственно радиус и скорость на исходной круговой орбите.

Разрешая написанное уравнение относительно ΔV , найдем

$$\Delta V = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2K}{r}} - \sqrt{\frac{K}{r}}.$$

Исследуя экстремум ΔV как функции от r , получим

$$r_{\text{opt}} = \frac{2K}{V_\infty^2}.$$

Соответствующая найденному значению r_{opt} величина ΔV_{\min} равна

$$\Delta V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2} V_\infty.$$

4. Величина ΔV достигает минимума при $r_\pi \rightarrow 0$.

У к а з а н и е. Воспользовавшись интегралом энергии (см. решение предыдущей задачи), найдем

$$\Delta V = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2K}{r}} - \sqrt{\frac{2K}{r}}.$$

5. При перелете с круговой орбиты радиуса r_1 на круговую орбиту радиуса r_2 по гомановскому эллипсу суммарный импульс скорости, отнесенный к скорости исходной круговой орбиты, равен

$$\Delta V = (1-k) \sqrt{\frac{2}{k+1}} + \sqrt{k} - 1,$$

где $k = r_1/r_2 < 1$.

Чтобы в какой-нибудь точке круговой орбиты космический аппарат приобрел вторую космическую скорость, ему необходимо сообщить импульс $\Delta V_{\text{пар}}$, равный

$$\frac{\Delta V_{\text{пар}}}{V_{1\text{кр}}} = \sqrt{2} - 1.$$

Приравнивая правые части написанных соотношений, придем к кубическому уравнению

$$k^3 - 22k^2 + 33k - 8 = 0,$$

которое имеет единственный положительный корень $k \approx 0,296$, откуда $r_2/r_1 = 3,4$. Такой же импульс потребуется и при $r_2/r_1 \rightarrow \infty$. Действительно, полагая $k=0$, получим

$$\Delta V = \sqrt{2} - 1.$$

6. Значение отношения, при котором суммарный импульс скорости достигает максимума, является корнем кубического уравнения

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 - 15\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 9\frac{r_2}{r_1} - 1 = 0.$$

Вычисляя его, получим

$$\frac{r_2}{r_1} = 15,6.$$

7. Для удаления в бесконечность с орбиты r_1 космическому аппарату нужно сообщить импульс скорости

$$\Delta V_1 = (\sqrt{2} - 1) V_1,$$

где V_1 — скорость на исходной круговой орбите r_1 . Для перехода с параболической орбиты возвращения на круговую орбиту r_2 требуется импульс скорости

$$\Delta V_2 = (\sqrt{2} - 1) V_2,$$

где V_2 — скорость на конечной круговой орбите r_2 . Суммарный импульс $\Delta V_{\text{пар}}$ при такой схеме перелета будет равен

$$\Delta V_{\text{пар}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) (\sqrt{2} - 1) \right] V_1, \quad (*)$$

где $\rho = r_2/r_1$. При перелете по гомановскому эллипсу понадобится суммарный импульс ΔV , равный

$$\Delta V = \left[\left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \sqrt{\frac{2\rho}{1+\rho}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} - 1 \right] V_1. \quad (**)$$

Значение ρ , при котором оба маневра приводят к одинаковым энергетическим затратам, найдем, приравнявая правые части уравнений (*) и (**). После упрощений будем иметь

$$\rho^3 - (7 + 4\sqrt{2})\rho^2 + (3 + 4\sqrt{2})\rho - 1 = 0.$$

Полученное кубическое уравнение имеет единственный вещественный корень

$$\rho \approx 11,9.$$

Кривые $\Delta V = \Delta V(\rho)$, соответствующие уравнениям (*) и (**), имеют одинаковые асимптоты при $\rho \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Delta V}{V_1} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Delta V_{\text{пар}}}{V_1} = \sqrt{2} - 1.$$

Так как ΔV при перелете по гомановскому эллипсу достигает максимума при $\rho \approx 15,6$ (см. решение задачи 6), а ΔV , вычисленное по формуле (*), монотонно убывает при $\rho \rightarrow \infty$, то при $\rho > 11,9$ перелет с орбиты r_1 на орбиту r_2 с промежуточным удалением на бесконечность энергетически выгоднее перелета по гомановскому эллипсу.

8. Запишем интеграл энергии в точке приложения первого импульса скорости

$$\frac{1}{2} (V_1 + \Delta V_1)^2 - \frac{K}{r_1} = -\frac{K}{r_1 + r_a},$$

где K — гравитационный параметр центрального ньютоновского поля. Так как $V_1^2 = K/r_1$, то после несложных преобразований получим

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \left| \sqrt{\frac{2r_a}{r_1 + r_a} - 1} \right|.$$

Аналогично получим формулы и для двух других импульсов:

$$\frac{\Delta V_2}{V_1} = \left| r_2 \frac{V_2}{V_1} \sqrt{\frac{2}{r_a(r_a + r_2)}} - r_1 \sqrt{\frac{2}{r_a(r_1 + r_a)}} \right|,$$

$$\frac{\Delta V_3}{V_1} = \left| \frac{V_3}{V_1} \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r_2} - 1} \right) \right|.$$

Складывая полученные величины импульсов, найдем полный импульс биэллиптического маневра.

9. $\frac{r_a}{r_1} = -\frac{1 + 3\rho}{3(1 + \rho) - 2\sqrt{\rho(3\rho - 2)}}$. Искомое значение ρ является положительным корнем уравнения

$$\rho^3 - 15\rho^2 - 9\rho - 1 = 0.$$

У к а з а н и е. Оптимальное значение r_a находится из условия

$$\frac{\partial(\Delta V)}{\partial r_a} = 0,$$

где $\Delta V = f(\rho, r_a)$ — величина суммарного импульса трехимпульсного (биэллиптического) перелета (см. предыдущую задачу). Вырождение трехимпульсного перелета в гомановский произойдет при $r_a/r_1 = \rho$, что приводит для искомого значения ρ к уравнению

$$(3\rho + 1)(\rho^3 - 15\rho^2 - 9\rho - 1) = 0.$$

10. При удалении апоцентра промежуточной эллиптической орбиты в бесконечность скорость в апоцентре стремится к нулю, а следовательно, необходимый для поворота орбиты импульс ΔV_2 также близок к нулю.

Импульс ΔV_1 определится из условия перехода с круговой орбиты на параболическую:

$$\Delta V_1 = \sqrt{2} V_{кр} - V_{кр} = (\sqrt{2} - 1) V_{кр},$$

где $V_{кр}$ — скорость на исходной круговой орбите. Такую же величину должен иметь и тормозной касательный импульс ΔV_3 . Таким образом, суммарный импульс ΔV_{Σ} равен

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_3 = 2(\sqrt{2} - 1) V_{кр}.$$

При одноимпульсном повороте исходной круговой орбиты на угол i требуется импульс (см. рис. 10.3)

$$\Delta V = 2V_{кр} \sin \frac{i}{2}.$$

При

$$i > 2 \arcsin(\sqrt{2} - 1) \approx 49^\circ.$$

Получим $\Delta V_{\Sigma} < \Delta V$, т. е. трехимпульсный поворот энергетически оказывается более выгодным.

11. Используя интеграл энергии, в апоцентре промежуточной орбиты имеем

$$\frac{1}{2} V_a^2 - \frac{K}{r} = -\frac{K}{r_a + r},$$

где K — гравитационный параметр притягивающего центра. Отсюда, учитывая, что $\sqrt{K/r} = V_{кр}$ есть скорость на исходной круговой орбите, найдем

$$\frac{V_a}{V_{кр}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{r_a}{r} \left(1 + \frac{r_a}{r}\right)}} \quad (*)$$

Из интеграла площадей получим

$$V_a r_a = (V_{кр} + \Delta V_1) r,$$

или

$$\frac{V_a}{V_{кр}} = \frac{r}{r_a} \left(1 + \frac{\Delta V_1}{V_{кр}}\right) \quad (**)$$

Из (*) и (**) находим

$$\frac{\Delta V_1}{V_{кр}} = \frac{\Delta V_3}{V_{кр}} = \frac{r_a}{r} \sqrt{\frac{2}{\frac{r_a}{r} \left(1 + \frac{r_a}{r}\right)}} - 1,$$

где ΔV_3 — тормозной касательный импульс, переводящий космический аппарат с повернутой эллиптической орбиты на круговую радиуса r . Импульс ΔV_2 , приложенный в апоцентре эллиптической орбиты и осуществляющий поворот ее на заданный угол i , найдется по формуле

$$\Delta V_2 = 2V_a \sin \frac{i}{2} = 2 \sqrt{\frac{2}{\frac{r_a}{r} \left(1 + \frac{r_a}{r}\right)}} V_{кр} \sin \frac{i}{2}.$$

Складывая все три импульса ΔV_1 , ΔV_2 , ΔV_3 , убеждаемся в справедливости приведенной формулы.

При одноимпульсном повороте круговой орбиты на угол i потребный импульс скорости ΔV равен (см. рис. 10.3)

$$\Delta V = 2V_{кр} \sin \frac{i}{2}.$$

Из условия, что отношение $\Delta V_2/\Delta V = 0,8$ при $i = \pi/2$, приходим к квадратному уравнению относительно искомого значения r_a/r :

$$(0,17 - 0,2\sqrt{2}) \left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + (0,8\sqrt{2} - 0,33) \frac{r_a}{r} + 1 = 0.$$

Полученное уравнение имеет единственный положительный корень $r_a/r \approx 8,2$.

12. При малых значениях $\Delta H/r$ имеем

$$\Delta H = \Delta r = \frac{\partial r}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial r}{\partial \theta} \Delta \theta,$$

$$\frac{\partial r}{\partial V} = \frac{2r}{V} (1 - \cos \varphi), \quad \frac{\partial r}{\partial \theta} = r \sin \varphi,$$

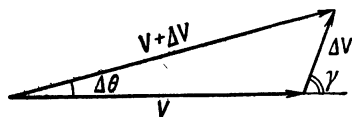


Рис. P.10.2.

где r и V — соответственно радиус и скорость на круговой орбите, $\Delta \theta$ — малое приращение угла траектории θ , обусловленное импульсом ΔV (рис. P.10.2). При малых значениях $|\Delta V|$ имеем

$$\Delta |V| = |\Delta V| \cos \gamma, \quad \Delta \theta = \frac{|\Delta V|}{V} \sin \gamma,$$

и, следовательно,

$$\Delta H = \left[2 \frac{r}{V} (1 - \cos v) \cos \gamma + \frac{r}{V} \sin v \sin \gamma \right] \Delta V = f(v, \gamma) \Delta V.$$

Чтобы $|\Delta V|$ было минимальным, функция $f(v, \gamma)$ должна иметь экстремум. Из условия $\partial f / \partial \gamma = 0$ находим γ_{opt}

$$\text{tg } \gamma_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \text{ctg } \frac{v}{2}.$$

Подставляя найденное значение γ_{opt} в выражение, определяющее изменение ΔH , получим

$$\frac{|\Delta V|}{V} = \frac{1}{2 \sin \frac{v}{2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \frac{v}{2}}} \frac{\Delta H}{r}.$$

$$13. \text{tg } \gamma_{\text{opt}} = \frac{4 \sin v - 3v}{2(\cos v - 1)}.$$

У к а з а н и е. Используйте решение предыдущей задачи.

14. Необходимое значение истинной аномалии определяется из решения уравнения

$$\frac{\sin v - v}{5 - 3 \cos v} = \frac{1}{6} \frac{\Delta L}{\Delta H}.$$

У к а з а н и е. Импульс ΔV в точке встречи приводит к изменению дальности ΔL , равному

$$\Delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial V} \cos \gamma_{\text{opt}} + \frac{1}{V} \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \sin \gamma_{\text{opt}} \right) \Delta V,$$

$$\frac{\partial L}{\partial V} = \frac{r}{V} (4 \sin v - 3v), \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 2r (\cos v - 1);$$

оптимальный угол γ_{opt} находится по формуле (см. решение предыдущей задачи)

$$\text{tg } \gamma_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \text{ctg } \frac{v}{2}.$$

15. $\text{tg } \gamma_{\text{opt}} = \frac{\partial x_i}{\partial V_r} / \frac{\partial x_i}{\partial V_n}$, где V_r и V_n — радиальная и трансверсальная составляющие скорости точки А.

У к а з а н и е. Вследствие малости изменения x_i воспользуйтесь линейной аппроксимацией зависимости $\Delta x_i = \Delta x_i(\Delta V)$, а также соотношениями

$$\Delta V_r = \Delta V \sin \gamma, \quad \Delta V_n = \Delta V \cos \gamma.$$

16. Запишем два интеграла уравнений движения в центральном ньютоновском поле

$$V_n r = V_{n0} r_0, \quad \frac{V_r^2 + V_n^2}{2} - \frac{K}{r} = \frac{V_{n0}^2}{2} - \frac{K}{r_0},$$

где K — гравитационный параметр притягивающего центра, V_{n0} — скорость в перигее расчетной орбиты, а V_r , V_n — радиальная и трансверсальная составляющие скорости. Исключая из второго уравнения V_n , получим

$$\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{V_n^2}{2} - \frac{K}{r_0} = \frac{V_r^2 + V_n^2}{2} - \frac{K}{r}.$$

Продифференцируем полученное соотношение частным образом по V_{Π} и V_r , имея в виду, что в точке приложения корректирующего импульса расстояние r остается неизменным. После несложных преобразований найдем

$$\frac{\partial r_{\Pi}}{\partial V_r} = \frac{2r_{\Pi}}{V_{\Pi}} \frac{n^2 - 1}{n}, \quad \frac{\partial r_{\Pi}}{\partial V_{\Pi}} = \frac{2r_{\Pi}}{V_{\Pi}} \frac{\sqrt{n-1}}{n},$$

где $n = r/r_{\Pi}$. Так как $\operatorname{tg} \gamma_{\text{opt}} = \frac{\partial r_{\Pi}}{\partial V_r} / \frac{\partial r_{\Pi}}{\partial V_{\Pi}}$ (см. предыдущую задачу), то окончательно получим

$$\operatorname{tg} \gamma_{\text{opt}} = (n + 1) \sqrt{n-1}$$

При $n=2$ и $n=5$ будем иметь

$$\gamma_{\text{opt}} \approx 71^{\circ},5, \quad \gamma_{\text{opt}} \approx 85^{\circ}.$$

17. Пусть $\Delta H_1, \Delta L_1$ и $\Delta H_2, \Delta L_2$ — заданные отклонения от расчетной круговой орбиты каждого из спутников. Предполагая, что импульс скорости ΔV сообщается первому спутнику, запишем матричные уравнения, определяющие отклонения параметров траектории обоих спутников в заданной точке встречи:

$$\left. \begin{aligned} A(v) (\Delta x_1 + \Delta y) &= \Delta \hat{x}_1, \\ A(v) \Delta x_2 &= \Delta \hat{x}_2, \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2$ и $\Delta \hat{x}_1, \Delta \hat{x}_2$ — матрицы-столбцы отклонений параметров траектории первого и второго спутников в предполагаемой и новой точках встречи соответственно, $A(v)$ — матрица частных производных текущих значений параметров по их начальным значениям для круговых орбит, v — искомый оптимальный геоцентрический угол,

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \Delta V \\ \frac{\Delta V}{V} \sin \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где γ — угол наклона импульса ΔV к горизонту. Так как в новой точке встречи должно быть

$$\Delta \hat{x}_1 - \Delta \hat{x}_2 = 0,$$

то, вычитая одно уравнение (*) из другого, получим

$$A(v) \Delta y = A(v) (\Delta x_2 - \Delta x_1).$$

Полагая вектор-столбец $A(\Delta x_2 - \Delta x_1)$ равным

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta H \\ \Delta L \end{bmatrix},$$

придем к системе уравнений для определения импульса ΔV , угла наклона его γ и геоцентрического угла v :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r}{\partial V} + \frac{\partial r}{\partial v} \sin \gamma \right) \Delta V &= \Delta H, \\ \left(\frac{\partial L}{\partial V} + \frac{\partial L}{\partial v} \sin \gamma \right) \Delta V &= \Delta L. \end{aligned}$$

Исключая из полученных уравнений угол γ , получим зависимость величины импульса ΔV от угла v :

$$\frac{\Delta V}{V} = f(k, v) \frac{\Delta L}{r}, \quad f(k, v) = \frac{2k(\cos v - 1) - \sin v}{8(\cos v - 1) + 3v \sin v}.$$

Оптимальное значение v дается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

в которое входит только отношение $k = \Delta H / \Delta L$.

18. При двух касательных импульсах согласно уравнению (10.2.2) получим

$$A(v_1) \Delta y_1 + A(v_2) \Delta y_2 = -\Delta \hat{x},$$

где векторы-столбцы Δy_i и $\Delta \hat{x}$ имеют вид

$$\Delta y_i = \begin{bmatrix} \Delta V_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta H \\ \Delta L \end{bmatrix}.$$

Вводя элементы матриц частных производных для движения по круговой орбите $a_{ij}(v_1)$ и $a_{ij}(v_2)$, придем к системе уравнений:

$$\begin{aligned} a_{31}(v_1) \Delta V_1 + a_{31}(v_2) \Delta V_2 &= -\Delta H, \\ a_{41}(v_1) \Delta V_1 + a_{41}(v_2) \Delta V_2 &= -\Delta L, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{31}(v_i) &= \frac{2r}{V} (1 - \cos v_i), \\ a_{41}(v_i) &= \frac{r}{V} (4 \sin v_i - 3v_i) \quad (i=1, 2). \end{aligned}$$

Решая полученную систему, найдем

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \frac{1}{\Delta} [a_{31}(v_2) \Delta L - a_{41}(v_2) \Delta H], \\ \Delta V_2 &= \frac{1}{\Delta} [-a_{31}(v_1) \Delta L + a_{41}(v_1) \Delta H], \end{aligned}$$

где

$$\Delta = 8 \frac{r^2}{V^2} \left[\sin v_2 - \sin v_1 - \sin(v_2 - v_1) - \frac{3}{4} (v_2 - v_1 + v_1 \cos v_2 - v_2 \cos v_1) \right].$$

При $v_i = \text{const}$ необходимое условие экстремума для J имеет вид

$$\begin{aligned} \{ -[a_{41}(v_1) \pm a_{42}(v_2)] \Delta H + [a_{31}(v_2) \pm a_{31}(v_1)] \Delta L \} \frac{\partial \Delta}{\partial v_1} &= \\ &= \pm \left[\frac{\partial a_{31}(v_2)}{\partial v_2} \Delta L - \frac{\partial a_{41}(v_2)}{\partial v_2} \Delta H \right]. \end{aligned}$$

§ 3

$$\begin{aligned}
 1. \quad & mV \frac{d\lambda}{dz} + \lambda \left[(V - V_r) \frac{dm}{dz} - \frac{\partial Q}{\partial V} \right] = 0, \\
 & VV_r \frac{d\lambda}{dz} - \lambda \left[(V - V_r) \frac{dV}{dz} + g \right] = 0, \\
 & mV \frac{dV}{dz} + mg + Q(V, z) + VV_r \frac{dm}{dz} = 0,
 \end{aligned}$$

где g — ускорение силы тяжести, $\lambda(z)$ — множитель Лагранжа.

У к а з а н и е. В уравнении Мещерского, определяющем вертикальное движение ракеты

$$m \frac{dV}{dt} = -mg - Q(V, z) - V_r \frac{dm}{dt},$$

перейдите от независимой переменной t к координате z , после чего функция Лагранжа F запишется в виде

$$F = 1 + \lambda(z) \left[mV \frac{dV}{dz} + mg + Q(V, z) + V_r V \frac{dm}{dt} \right].$$

$$3. \quad z_{\max} = \int_0^{V_0} \frac{m + V_r \frac{dm}{dz}}{mg + Q(V)} V dV, \quad V_r mg + Q(V_r - V) - VV_r \frac{dQ}{dV} = 0.$$

У к а з а н и е. Представим функционал задачи $z_{\max} = \int_0^T V dt$ в виде

$$z_{\max} = \int_{V_0}^0 \frac{V dV}{\dot{V}}.$$

Величину \dot{V} можно исключить с помощью уравнения Мещерского

$$\left(1 + V_r \frac{dm}{dV} \right) \frac{dV}{dt} = -(mg + Q),$$

если учесть, что

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt}.$$

4. Выражение для ускорения w получим из уравнения Мещерского, куда вместо \dot{m} введем $\frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt}$. Получим

$$w = \dot{V} = - \frac{mg + Q}{1 + V_r \frac{dm}{dV}}.$$

При $Q = kV^2$ решение соответствующего уравнения Эйлера — Лагранжа имеет вид (см. предыдущую задачу)

$$m = \frac{kV^2}{gV_r} (V + V_r).$$

Подставляя это решение в уравнение Мещерского, будем иметь

$$w = -\frac{g(V^2 - V_r V)}{V^2 + 4V_r V + 2V_r^2}.$$

5. Начальная скорость V_0 является корнем кубического уравнения

$$V_0^3 + V_r V_0^2 - \frac{g V_r}{k} = 0, \quad H_{\max} = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} V_0^3 + 2V_r V_0 - 2V_r^2 \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V_0}{V_r} \right) \right],$$

где g — ускорение силы тяжести, V_r — скорость истечения газов.

Указание. Начальная скорость должна удовлетворять уравнению, определяющему экстремаль задачи

$$m = \frac{k V^2}{g V_r^2} (V + V_r).$$

При $V = V_0$ имеем $m = 1$.

Максимальную высоту найдем, вычисляя функционал задачи, взятый в виде (см. задачу 3)

$$H_{\max} = \int_0^{V_0} \frac{m + V_r \frac{dm}{dz}}{mg + Q(V)} V dV.$$

6. Для реактивной силы Φ в начальный момент движения имеем

$$\Phi_0 = -M_0 V_r \left(\frac{dm}{dV} \right)_0 \left(\frac{dV}{dt} \right)_0,$$

где M_0 — начальное значение массы ракеты, а $m = M/M_0$. Из общего решения вариационной задачи найдем

$$\left(\frac{dm}{dV} \right)_0 = \frac{k V_0}{g V_r} (3V_0 + 2V_r), \quad \left(\frac{dV}{dt} \right)_0 = \frac{g (V_0^3 - 2V_0 V_r)}{V_0^2 + 4V_0 V_r + 2V_r^2},$$

где V_r — скорость истечения газов.

В результате будем иметь

$$\frac{\Phi_0}{M_0 g} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V_0}{V_r} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{V_0}{V_r} \right) \left(1 + \frac{V_0}{V_r} \right)^{-1} \left(1 + 2 \frac{V_0}{V_r} \right)^{-1},$$

где $M_0 g$ — начальный вес ракеты. Раскладывая полученное выражение в ряд по степеням V_0/V_r и удерживая только члены первого порядка, получим

$$\frac{\Phi_0}{M_0 g} = 2 \left(1 - \frac{V_0}{V_r} \right) + O_2 \left(\frac{V_0}{V_r} \right).$$

Используя соотношение

$$m = \frac{k V^2}{g V_r^2} (V + V_r)$$

при $V = V_0$, найдем

$$\frac{M_0 g}{Q_0} = \left(1 + \frac{V_0}{V_r} \right).$$

Отсюда

$$\frac{Q_0}{\Phi_0} = \frac{1 + \frac{V_0}{V_r}}{2 \left(1 - \frac{V_0}{V_r} \right)}, \quad \frac{\Phi_0}{Q_0 + M_0 g} = \left(1 - \frac{V_0}{V_r} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{V_0}{V_r} \right) \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{V_0}{V_r}.$$

7. $\omega = V \frac{\beta V_r (\dot{V} + V_r) - g (V + 2V_r)}{V^2 + 4VV_r + 2V_r^2}$, где g — ускорение силы тяжести.

Указание. См. решение задачи 4.

8. $T = \int_{V_1}^{V_0} \frac{m + V_r \frac{dm}{dV}}{mg + kV^2} dV$, $F = \frac{m + \frac{dm}{dV} V_r}{mg + kV^2} (\lambda V + 1)$, где g — ускорение силы

тяжести, а λ — постоянный множитель Лагранжа.

9. $m(V) = \frac{kV^2}{g\lambda V_r} [V + 2V_r + \lambda V (V + V_r)]$.

10. Решение поставленной вариационной задачи дается уравнением (см. решение предыдущей задачи)

$$\frac{mg}{k} = V^2 \left(1 + \frac{V}{V_r}\right) + \frac{V}{\lambda} \left(2 + \frac{V}{V_r}\right),$$

где g — ускорение силы тяжести, λ — множитель Лагранжа, $m = M/M_0$ — относительная масса ракеты. Имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} V &= V_0, & m &= 1, \\ V &= V_1, & m &= \frac{M_0 - M_T}{M_0}. \end{aligned}$$

Подставляя их в решение, найдем

$$\begin{aligned} \frac{g}{k} &= V^2 \left(1 + \frac{V}{V_r}\right) + \frac{V}{\lambda} \left(2 + \frac{V}{V_r}\right), \\ \frac{g}{k} \left(1 - \frac{M_T}{M_0}\right) &= V^2 \left(1 + \frac{V}{V_r}\right) + \frac{V}{\lambda} \left(2 + \frac{V}{V_r}\right). \end{aligned}$$

Исключая из приведенных соотношений множитель Лагранжа, получим

$$\frac{M_T}{M_0} = 1 - V_1 \left(1 + \frac{V_1}{V_r}\right) + \frac{V_1}{V_0} \frac{2 + \frac{V_1}{V_r}}{2 + \frac{V_0}{V_r}} \left[\frac{g}{k} - V_0^2 \left(1 + \frac{V_0}{V_r}\right) \right].$$

11. Запишем уравнения движения ракеты в проекциях на касательную и нормаль к траектории

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= -mg \sin \vartheta - kV^2 - \frac{dm}{dt} V_r, \\ \frac{V^2}{\rho} &= g \cos \vartheta, \end{aligned}$$

где g — ускорение силы тяжести, ϑ — угол наклона траектории к горизонту, ρ — радиус кривизны параболы. Учитывая, что для параболы $\rho = (2a \cos^2 \vartheta)^{-1}$, последнее уравнение можно записать в виде

$$V^2 = \frac{g}{2a \cos^2 \vartheta}. \quad (*)$$

Используя первое уравнение исходной системы для функционала задачи T , будем иметь

$$T = \int_{V_1}^{V_0} \frac{m + \frac{dm}{dV} V_r}{mg \sin \vartheta + Q(V)} dV.$$

В аналогичной форме запишем уравнение связи

$$l_1 = \int_{V_1}^{V_0} \frac{m + \frac{dm}{dV} V_r}{mg \sin \vartheta + Q(V)} V dV,$$

где l_1 — заданная длина дуги параболы. Исключая в выражениях для T и l_1 угол ϑ с помощью уравнения (*), найдем окончательное выражение для функционала задачи T и функцию Лагранжа F :

$$T = \int_{V_1}^{V_0} \frac{m + \frac{dm}{dV} V_r}{Q(V) + mg \sqrt{1 - \frac{g}{2aV^2}}} dV,$$

$$F = \frac{m + \frac{dm}{dV} V_r (1 + \lambda V)}{Q(V) + mg \sqrt{1 - \frac{g}{2aV^2}}},$$

где λ — множитель Лагранжа.

12. Воспользовавшись уравнениями движения в проекциях на касательную и нормаль к траектории (см. решение предыдущей задачи), запишем функционал задачи T и уравнение связи

$$T = \int_{V_1}^{V_0} \frac{m + \frac{dm}{dV} V_r}{kV^2 + mg \sin \vartheta} dV,$$

$$l_1 = \int_{V_1}^{V_0} \frac{m + \frac{dm}{dV} V_r}{kV^2 + mg \sin \vartheta} V dV,$$

где ϑ — угол наклона траектории к горизонту. Исключая ϑ с помощью соотношения $V^2 = gr \cos \vartheta$, получим выражение для функции Лагранжа F :

$$F = \frac{(1 + \lambda V) \left(m + \frac{dm}{dV} V_r \right)}{kV^2 + mg \sqrt{1 - \frac{V^4}{g^2 r^2}}}.$$

Из уравнения Эйлера — Лагранжа найдем

$$m(V) = \frac{\sqrt{1 - \beta V^4} k V^2 [(V + 2V_r) + \lambda V (V + V_r)]}{g V_r}, \quad \beta = \frac{1}{g^2 r^2}.$$

Так как при $V = V_0$ имеем $m = 1$, то для множителя Лагранжа λ будем иметь

$$\lambda = \frac{V_0^2}{\sqrt{1 - \beta V_0^4}} \frac{k \left(2 + \frac{V_0}{V_r} \right) \sqrt{1 - \beta V_0^4} - 2\beta g}{g \sqrt{1 - \beta V_0^4} - k V_0^2 \left(1 + \frac{V_0}{V_r} \right)}.$$

13. Уравнения движения космического аппарата в проекциях на касательную и нормаль к траектории будут

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{V_r}{M_0} \frac{dm}{dt} - (a + b\alpha^2) \frac{V^2}{mM_0}, \\ \frac{V^2}{r} &= g - \frac{k\alpha^2 V^2}{mM_0}, \end{aligned}$$

где g — гравитационное ускорение на рассматриваемой круговой орбите.

Из последнего уравнения найдем угол атаки α в функции скорости V :

$$\alpha = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{M_0 g}{k} \left(1 - \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right) m},$$

где $V_{кр}^2 = gr$ — первая космическая скорость на расстоянии r от центра притяжения. Подставляя полученное значение α в первое уравнение движения и учитывая, что

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dV} \frac{dV}{dt} = m' \frac{dV}{dt},$$

будем иметь

$$-(m + m'V_r) \frac{dV}{dt} = \frac{a}{M_0} V^2 + \frac{b}{V} \sqrt{M_0 \left[\frac{gm}{k} \left(1 - \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right) \right]^3}.$$

Выражая из полученного соотношения dt , найдем

$$- \frac{(m + m'V_r) V dV}{\frac{a}{M_0} V^2 + b \sqrt{M_0 \left[\frac{gm}{k} \left(1 - \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right) \right]^3}} = dt.$$

Теперь функционал задачи представится в виде

$$L = \int_{V_1}^{V_0} \frac{(m + m'V_r) V^2 dV}{\frac{a}{M_0} V^2 + b \sqrt{M_0 \left[\frac{gm}{k} \left(1 - \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right) \right]^3}} = \int_{V_1}^{V_0} F(m, m') dV.$$

Используя уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{\partial F}{\partial m'} \right) - \frac{\partial F}{\partial m} = 0,$$

после несложных преобразований получим

$$m = \frac{k(VV_{кр})^2}{gM_0} \sqrt{\frac{4a^2(V + V_r)}{b(V_{кр}^2 - V^2) [6V^2V_r + (V + 4V_r)(V_{кр}^2 - V^2)]}}.$$

14. В неподвижной прямоугольной системе координат уравнения движения ракеты можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{u} &= \omega \cos \varphi, \\ \dot{y} &= v, & \dot{v} &= \omega \sin \varphi - g, \end{aligned}$$

где ω — реактивное ускорение ($\omega(t)$ — заданная функция времени), g — ускорение силы тяжести.

Пусть x_1, y_1 , и u_1, v_1 — соответственно прямоугольные координаты и составляющие скорости ракеты в данный момент времени T выключения двигателя. Тогда полная дальность L при условии, что в начальный момент $x_0 = y_0 = u_0 = v_0 = 0$, будет равна

$$L = x_1 + \frac{u_1}{g} (v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}).$$

Функция Лагранжа F имеет вид

$$F = -\lambda_u \omega \cos \varphi - \lambda_v (\omega \sin \varphi - g) - \lambda_x u - \lambda_y v,$$

где $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_x, \lambda_y$ — множители Лагранжа. Необходимые условия экстремума приводят к дифференциальным уравнениям

$$\dot{\lambda}_u = -\lambda_x, \quad \dot{\lambda}_v = -\lambda_y, \quad \dot{\lambda}_x = \dot{\lambda}_y = 0, \quad (*)$$

а также к уравнению $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$, что дает

$$\omega (\lambda_u \sin \varphi - \lambda_v \cos \varphi) = 0. \quad (**)$$

Из условий трансверсальности получаем

$$\left. \begin{aligned} \lambda_u &= -\frac{1}{g} (v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}), & \lambda_x &= -1, \\ \lambda_v &= -\frac{u_1}{gr} (v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}), & \lambda_y &= -\frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

Интегрируя уравнения (*), найдем

$$\begin{aligned} \lambda_u &= c_1 t + c_2, & \lambda_x &= -c_1, \\ \lambda_v &= c_3 t + c_4, & \lambda_y &= -c_3, \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — постоянные интегрирования, для которых с использованием условий (***) в момент $t = T$ будем иметь

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, & c_2 &= -T - \frac{1}{g} (v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}), \\ c_3 &= \frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}}, & c_4 &= -\frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}} \left[T + \frac{1}{g} (v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}) \right]. \end{aligned}$$

Из уравнения (**) находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_v}{\lambda_u} = \frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}}.$$

Таким образом, максимальная дальность достигается при постоянном угле наклона вектора тяги к горизонту вне зависимости от программы изменения величины реактивного ускорения $\omega(t)$.

15. Траекторией ракеты на активном участке движения является прямая, наклоненная к горизонту под углом ϑ , равным

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \varphi_{\text{opt}} - \frac{g}{\alpha V_r} \sec \varphi_{\text{opt}} \right),$$

где V_r — скорость истечения газов, g — ускорение силы тяжести, φ_{opt} — оптимальный (постоянный) угол наклона реактивной тяги к горизонту, являющийся корнем уравнения

$$\sin^3 \varphi + \frac{\alpha V_r}{g} \cos 2\varphi = 0.$$

Полная дальность находится по формуле

$$L_{\text{max}} = \frac{\alpha V_r T^2}{g} \left(\alpha V_r \operatorname{ctg} \varphi_{\text{opt}} - \frac{g}{2} \cos \varphi_{\text{opt}} \right).$$

У к а з а н и е. При заданном законе изменения массы величина реактивного ускорения ω постоянна, в результате чего дифференциальные уравнения движения ракеты могут быть проинтегрированы до конца (см. предыдущую задачу).

16.

$$L_{\text{max}} = \frac{V_r \cos \varphi_{\text{opt}}}{g} \left\{ M_0 - (M_0 - gT) \left[\ln \left(1 - \frac{gT}{M_0} \right) - 1 \right] \right\} + \frac{u_1}{g} [v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}],$$

где V_r — скорость истечения газов, g — ускорение силы тяжести,

$$y_1 = \frac{V_r \sin \varphi_{\text{opt}}}{g} \left\{ M_0 + (M_0 - gT) \left[\ln \left(1 - \frac{gT}{M_0} \right) - 1 \right] \right\} - \frac{gT^2}{2},$$

а v_1 и u_1 — вертикальная и горизонтальная составляющие скорости ракеты, равные

$$v_1 = -gT + V_r \sin \varphi_{\text{opt}} \ln \frac{M_0}{M_0 - gT},$$

$$u_1 = V_r \cos \varphi_{\text{opt}} \ln \frac{M_0}{M_0 - gT}.$$

17. Максимальная дальность достигается при постоянном угле φ наклона реактивной тяги к горизонту. Оптимальное значение φ_{opt} является корнем уравнения

$$\sin(\varphi - \beta) \sin^2 \varphi + \frac{\alpha V_r}{g} \cos(2\varphi - \beta) = 0.$$

У к а з а н и е. Направьте ось x неподвижной системы координат с началом в точке старта под углом β к горизонту и воспользуйтесь решением задачи 14.

18. При заданном законе изменения массы ракеты необходимый запас топлива является возрастающей функцией времени T движения на активном участке траектории, вследствие чего приходим к задаче на быстроедействие с функционалом $J = T$.

В неподвижной прямоугольной системе координат x, y , начало которой помещено в точку старта, а ось x направлена по горизонтали в плоскости движения, уравнения движения ракеты можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \omega \cos \varphi, & \dot{x} &= u, \\ \dot{v} &= \omega \sin \varphi - g, & \dot{y} &= v, \end{aligned}$$

где u и v — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости ракеты, а ω — модуль заданного реактивного ускорения. Вместо последнего уравнения удобно рассмотреть уравнение

$$\dot{q} = \frac{\omega v}{g} \sin \varphi$$

для новой переменной η :

$$\eta = y + \frac{v^2}{2g}.$$

Функцию Лагранжа F можно взять в виде

$$F = -\lambda_u \omega \cos \varphi - \lambda_v (\omega \sin \varphi - g) - \lambda_\eta \frac{\omega v}{g} \sin \varphi,$$

где λ_u , λ_v , λ_η — множители Лагранжа, определяемые системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\lambda}_u = 0, \quad \dot{\lambda}_\eta = 0, \quad \dot{\lambda}_v = -\lambda_\eta \frac{\omega}{g} \sin \varphi.$$

Используя уравнения движения ракеты, последнее уравнение можно записать в виде

$$\dot{\lambda}_v = -\frac{\omega}{g} (\dot{v} + g).$$

Интегрируя, найдем

$$\lambda_\eta = a, \quad \lambda_u = c, \quad \lambda_v = -\frac{\omega}{g} v - at - b,$$

где a , b , c — произвольные постоянные.

Из условия $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$ получим

$$\lambda_u \sin \varphi - \lambda_v \cos \varphi - \lambda_\eta \frac{v}{g} \cos \varphi = 0.$$

Подстановка в полученное соотношение найденных значений для λ_u , λ_v , λ_η дает закон изменения угла φ наклона вектора тяги к горизонту:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{at + b}{c}.$$

19. $h = \frac{V_{\text{кр}}^2}{gE} \left(\frac{1}{n^2 - 1} - \frac{E}{2n} \right)$, где $n = \frac{\omega}{g}$, $E = \ln \frac{n+1}{n-1}$, g — ускорение силы тяжести.

Указание. Проинтегрируйте уравнения движения предыдущей задачи с граничными условиями $u = v = \eta = 0$ при $t = t_0$ и $\lambda_v = 0$, $\lambda_u \dot{u} + \lambda_v \dot{v} + \lambda_\eta \dot{\eta} = 1$ при $t = T$, взяв за независимую переменную угол φ наклона реактивной тяги к горизонту.

$$20. H = p_r u + \frac{p_\varphi v}{r} + \frac{p_u v^2}{r} - \frac{p_u}{r^2} + \frac{\omega_0 p_u}{1 - \frac{\omega_0 t}{V_r}} \cos \gamma - \frac{p_u u v}{r} + \frac{p_v \omega_0}{1 - \frac{\omega_0 t}{V_r}} \sin \gamma,$$

где $V_r = V_r^* / \sqrt{\frac{K}{r_0^*}}$, а $\omega_0 = \omega_0^* / \left(\frac{K}{r_0^{*2}} \right)$ — начальное значение модуля реактивного ускорения, K — гравитационный параметр центрального поля, p_r , p_φ , p_u , p_v — сопряженные импульсы для безразмерных переменных r , φ , u , v .

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } t = t_0 & \quad r = 1, \quad \varphi = 0, \quad u = 0, \quad v = 1, \quad p_v = 1; \\ \text{при } t = T & \quad r(u^2 + v^2) = 2, \quad p_u - p_r u r^2 = 0, \quad p_v - p_r v r^2 = 0. \end{aligned}$$

21. $\operatorname{tg} \gamma = \frac{p_v}{p_u}$, $\kappa = \omega (\sqrt{p_u^2 + p_v^2} - 1)$, где p_u, p_v — сопряженные импульсы для радиальной и трансверсальной составляющих скорости космического аппарата, $\omega = \omega^*/g$ — безразмерное реактивное ускорение (g — гравитационное ускорение на круговой орбите).

У к а з а н и е. Уравнения движения космического аппарата запишите в безразмерных полярных координатах $r, \varphi, u = \dot{r}, v = r\dot{\varphi}$ (см. предыдущую задачу) и введите новую переменную $\frac{dt_{\text{дв}}}{dt} = \delta$, определяющую время работы двигателя ($\delta = 1$ при включенном двигателе и $\delta = 0$ при выключенном двигателе).

22. Уравнения движения космического аппарата с солнечным парусом в полярной системе координат можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= u, & \frac{du}{dt} &= \frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\omega \cos^3 \gamma}{r^2}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v}{r}, & \frac{dv}{dt} &= -\frac{uv}{r} + \frac{\omega \sin \gamma \cos^2 \gamma}{r^2}, \end{aligned}$$

где $r = r^*/r_0^*$ и φ — безразмерные полярные координаты, $u = u^* / \sqrt{\frac{K}{r_0^*}}$ и

$v = v^* / \sqrt{\frac{K}{r_0^*}}$ — безразмерные радиальная и трансверсальная составляющие скорости, $\omega = \frac{\omega^* r_0^{*2}}{K}$, $t = t^* \sqrt{\frac{r_0^{*3}}{K}}$ — безразмерное время, K — гравитационный параметр центрального поля, r_0^* — радиус исходной гелиоцентрической орбиты (звездочкой помечены соответствующие размерные переменные).

Функция Гамильтона имеет вид

$$H = p_r u + \frac{p_\varphi u}{r} + \frac{p_u}{r^2} + \frac{p_u \omega \cos^3 \gamma}{r^2} - \frac{p_v uv}{r} + \frac{p_v \omega \sin \gamma \cos^2 \gamma}{r^2},$$

где p_r, p_φ, p_u, p_v — сопряженные импульсы. Из условия максимума функции H по γ находим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{9p_u^2 + 8p_v^2} - 3p_u}{4p_v}.$$

24. Вводя обозначения

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \dot{\alpha}, \quad u = \delta,$$

исходное дифференциальное уравнение движения спускаемого аппарата можно заменить системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_1 - bu, \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

где

$$a = -M_z^\alpha / J_z, \quad b = -M_z^\delta / J_z, \quad |u| \leq u_{\text{max}}.$$

Согласно принципу максимума составим функцию Гамильтона

$$H = p_1 x_2 - p_2 (ax_1 + bu),$$

где p_1 и p_2 — соответствующие сопряженные переменные. Из условия $H = H_{\max}$ находим оптимальное управление

$$u = u_{\max} \operatorname{sign} p_2. \quad (**)$$

Из системы уравнений для сопряженных переменных

$$\dot{p}_1 = ap_2, \quad \dot{p}_2 = -p_1$$

найдем

$$\ddot{p}_2 = -ap_2.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$p_2(t) = c_1 \sin(\sqrt{a}t + c_2). \quad (***)$$

Из (**) и (***) следует, что каждое последующее переключение управления происходит через половину периода $T = 2\pi/\sqrt{a}$.

Для отыскания функции переключения запишем уравнение фазовых траекторий, для чего поделим уравнения (*) друг на друга:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{ax_1 + bu}{x_2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь

$$\frac{1}{2} (ax_1^2 + x_2^2) + bux_1 = \text{const}.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$y^2 + (x + ku)^2 = c^2,$$

где $y = \frac{x_2}{\sqrt{a}}$, $x = x_1$, $k = \frac{b}{a} > 0$, $c = \text{const}$. Таким образом, изображающая точка может двигаться по окружности с центром либо в точке $(ku_{\max}, 0)$, либо в точке $(-ku_{\max}, 0)$. Требуемое конечное состояние представляет собой начало координат плоскости x, y .

Уравнение линии переключения можно представить в виде

$$F = y + \operatorname{sign} x \sqrt{k^2 u_{\max}^2 - [x - (2l + 1)ku_{\max} \operatorname{sign} x]^2}$$

при

$$2lku_{\max} \leq |x| \leq 2k(l + 1)u_{\max} \quad (l = 0, 1, 2).$$

Таким образом, оптимальные фазовые траектории сверху от линии переключения представляют собой окружности с центром в точке $(-ku_{\max}, 0)$, а снизу от линии переключения окружности с центром в точке $(ku_{\max}, 0)$, и, следовательно, оптимальное по быстродействию управление имеет вид

$$u = u_{\max} \operatorname{sign} F.$$

Г Л А В А XI

2. Годографом скорости является окружность, центр которой лежит на прямой, перпендикулярной линии апсид и проходящей через центр притяжения.

Б. Движение происходит под действием центральной силы

$$F(r) = -\frac{4\pi^2}{T^2} r,$$

где r — модуль радиуса-вектора материальной точки относительно притягивающего тела (точки).

$$\begin{aligned}
 18. \quad \frac{2T}{\varphi^2} = & \frac{a^2 v}{\mu} + \frac{2a}{\mu} (m_2 m_3 x_1 + m_1 m_3 x_2 + m_1 m_2 x_3) + \\
 & + \frac{2am_3}{\mu \sqrt{3}} [(2m_1 + m_2) x'_1 - (2m_2 + m_1) x'_2 + (m_2 - m_1) x'_3] + \\
 & + \frac{1}{3\mu} \{ (3m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3) x_3'^2 + 2m_3 [2(m_1 + m_2)(x_1'^2 + x_2'^2 - 2x_1'x_2') + \\
 & + (m_1 - 2m_2)x_2'x_3' + (m_2 - 2m_1)x_1'x_3'] \} + \\
 & + \frac{2m_3}{\mu \sqrt{3}} \{ 2(m_1 + m_2)(x_2x'_1 - x_1x'_2) + m_1(x_3x'_2 - x_2x'_3) + m_2(x_1x'_3 - x_3x'_1) \} + \\
 & + \frac{1}{\mu} (m_2 m_3 x_1^2 + m_1 m_3 x_2^2 + m_2 m_1 x_3^2),
 \end{aligned}$$

где a — длина стороны треугольника $m_1 m_2 m_3$ в невозмущенном движении, $\mu = m_1 + m_2 + m_3$, $v = m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1$.

$$21. \quad V_1 = \frac{K}{r} \left[1 + J \left(\frac{R_9}{r} \right)^2 \right], \quad V_2 = \frac{2K}{r} \left[1 + \frac{J}{3} \left(\frac{R_9}{r} \right)^2 \right],$$

где r — модуль радиуса-вектора космического аппарата относительно центра Земли, R_9 — экваториальный радиус Земли, K и J — гравитационный параметр и коэффициент при второй зональной гармонике.

$$22. \quad \Delta T_{\delta \Omega} = T_{\delta \Omega} - T = \frac{3\pi R_9^2 J}{\sqrt{Ka}} \left[3 - \frac{5}{2} \sin^2 i - \varepsilon \cos \omega (1 - 5 \sin^2 i) \right],$$

где T — оскулирующий драконический период обращения, R_9 — экваториальный радиус Земли, J и K — коэффициенты при второй зональной гармонике и гравитационный параметр поля тяготения Земли соответственно.

23.

V_r	s	Суммарная полезная нагрузка	Чистая полезная нагрузка	Возможные применения
2500	20,0	803	—	—
	11,8	385	—	—
	8,33	151	—	—
3000	20,0 \	2438	1538	+
	11,8	1401	501	—
	8,33	736	—	—
3500	20,0	5179	4279	+
	11,8	3292	2392	+
	8,33	1974	1074	—

$$24. \quad V_{\min} = V_2 - V_1, \quad x_{\min} = \frac{1-s}{\exp(V_1 - V_2) - s} - 1.$$

$$26. V_{\text{exp}} \left(-\frac{V^2}{2gR} \right) = V_0 \exp \left(\frac{V_0^2}{2gR} \right) \frac{\operatorname{tg}^{n+1} \psi + \operatorname{tg}^{n-1} \psi}{\operatorname{tg}^{n+1} \psi_0 + \operatorname{tg}^{n-1} \psi_0},$$

где V_0 и ψ_0 — значения V и ψ в начальный момент времени.

27. $r^4 - \frac{g}{\omega} r^2 \cos \varphi - \frac{gJ}{\omega} (3 - 5 \cos^2 \varphi) \cos \varphi = 0$, где g — гравитационное ускорение на круговой орбите, J — коэффициент при второй зональной гармонике.

28. При $0 < \omega_r < 1/8$:

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega_r (r_1 - 1)}} [r_1 F(\beta, k) - (r_1 - 1) E(\beta, k)],$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega_r (r_1 - 1)}} \Pi(\beta, r_2 - 1, k),$$

где

$$r = (r_2 - 1) \sin^2 \beta + 1, \quad k^2 = \frac{r_2 - 1}{r_1 - 1},$$

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8\omega_r}}{4\omega_r}, \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8\omega_r}}{4\omega_r}.$$

При $\omega_r > 1/8$:

$$t = \sqrt{\frac{2}{\omega_r}} \left[\frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} - F(\beta, k) + E(\beta, k) \right],$$

$$\varphi = \arcsin(k \sin \beta) - \frac{1}{\sqrt{8\omega_r}} F(\beta, k),$$

где

$$r = \frac{2}{1 - \cos \beta}, \quad k^2 = \frac{1}{8\omega_r},$$

а $F(\beta, k)$, $E(\beta, k)$, $\Pi(\beta, k)$ — эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода соответственно.

31. $V_{r1}/V_{r2} > 3$.

32. При $V_{\infty} > \sqrt{2}V_{\text{кр}}$, где $V_{\text{кр}}$ — скорость на исходной круговой орбите.

34. $\dot{v} = \dot{v}_0 (1 - 2 \frac{\delta r}{r_0} \cos \dot{v}_0 t)$, где \dot{v}_0 — угловая скорость обращения спутника на невозмущенной круговой орбите.

$$38. \Delta r = \sqrt{\frac{p^3}{K}} \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi + 2\varepsilon [\sin(\vartheta_0 + \varphi) - \sin \vartheta_0] + \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \vartheta_0)[1 + \varepsilon \cos(\vartheta_0 + \varphi)]^2 \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos(\vartheta_0 + \varphi) + \varepsilon^2}} \Delta V.$$

39. а) Период обращения увеличивается на величину

$$6\pi \left(\frac{\sqrt{k}}{2\pi} T \right)^{4/3} \Delta V;$$

б) Значение φ_0 является корнем уравнения

$$4 \sin \varphi_0 - 3 \varphi_0 = 0;$$

в) $\varphi_{\text{max}} = 2\pi - \arcsin \frac{3}{4}$.

40. Значения эксцентрисических аномалий спутников E_1 и E_2 в момент времени, когда расстояние между ними минимально, определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2} \left\{ \left[\frac{a_2}{a_1} e_2 + \cos \varphi (\cos E_1 - e_1) - \sin \varphi \sin E_1 \right] \sin E_2 + \right. \\ & \quad \left. + [\cos \varphi \sin E_1 - \sin \varphi (\cos E_1 - e_1)] \cos E_2 (1 - e_1 \cos E_1) \right\} - \\ & \quad - \left\{ \left[\frac{a_1}{a_2} e_1 + \cos \varphi (\cos E_2 - e_2) - \sin \varphi \sin E_2 \right] \sin E_1 + \right. \\ & \quad \left. + [\cos \varphi \sin E_2 - \sin \varphi (\cos E_2 - e_2)] \cos E_1 \right\} (1 - e_2 \cos E_1) = 0, \\ & (E_1 - e_1 \sin E_1) - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{3/2} (E_2 - e_2 \sin E_2) = \tau_2 - \tau_1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos \frac{\cos E_1^* - e_1}{1 - e_1 \cos E_1^*} - \arccos \frac{\cos E_2^* - e_2}{1 - e_2 \cos E_2^*}, \\ E_i^* - e_i \sin E_i^* &= \sqrt{\frac{K}{a_i^3}} \tau_i \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

K — гравитационный параметр притягивающего центра.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Число дней от начала юлианского периода

Летонс- числение	Год	Дни	Год	Дни	Год	Дни	Месяц	Простой год	Високос- ный год	Дни
	Астрономическое летоисчисление		Юлианский календарь		Григорианский календарь					
Астрономическое летоисчисление	— 2000	— 1424462	1900	2415020	1950	2433282	Январь	0	1	0
	— 1900	— 1387937	1901	2415385	1951	2433647		10	11	10
	— 1800	— 1351412	1902	2415750	1952*	2434013	20	21	20	
	— 1700	— 3314887	1903	2416115	1953	2434378	30	31	30	
	— 1600	— 1278362	1904*	2416481	1954	2434743	9	10	40	
	— 1500	— 1241837	1905	2416846	1955	2435108	19	20	50	
	— 1400	— 1205312	1906	2417211	1956*	2435474	1	1	60	
	— 1300	— 1168787	1907	2417576	1957	2435839	11	11	70	
	— 1200	— 1132262	1908*	2417942	1958	2436204	21	21	80	
	— 1100	— 1095737	1909	2418307	1959	2436569	31	31	90	
	— 1000	— 1059212	1910	2418672	1960*	2436935	10	10	100	
	— 900	— 1022687	1911	2419037	1961	2437300	20	20	110	
	— 800	— 986162	1912*	2419403	1962	2437665	30	30	120	
	— 700	— 949637	1913	2419768	1963	2438030	10	10	130	
	— 600	— 913112	1914	2420133	1964*	2438396	20	20	140	
	— 500	— 876587	1915	2420498	1965	2438761	30	30	150	
	— 400	— 840062	1916	2420864	1966	2439126	9	9	160	
	— 300	— 803537	1917	2421229	1967	2439491	19	19	170	
	— 200	— 767012	1918	2421594	1968*	2439857	29	29	180	
	— 100	— 730487	1919	2421959	1969	2440222	9	9	190	
Юлианский календарь	0	— 693962	1920*	2422325	1970	2440587	Август	19	19	200
	100	— 657437	1921	2422690	1971	2440952		29	29	210
	200	— 620912	1922	2423055	1972*	2441318	8	8	220	
	300	— 584387	1923	2423420	1973	2441683	18	18	230	
	400	— 547862	1924	2423786	1974	2442048	28	28	240	
	500	— 511337	1925	2424151	1975	2442413	7	7	250	
	600	— 474812	1926	2424516	1976*	2442779	17	17	260	
	700	— 438287	1927	2424881	1977	2443144	27	27	270	
	800	— 411762	1928*	2425247	1978	2443509	7	7	280	
	900	— 365237	1929	2425612	1979	2443874	17	17	290	
	1000	— 328712	1930	2425977	1980*	2444240	27	27	300	
	1100	— 292187	1931	2426342	1981	2444605	6	6	310	
	1200	— 255662	1932*	2426708	1982	2444970	16	16	320	
	1300	— 219137	1933	2427073	1983	2445335	26	26	330	
	1400	— 182612	1934	2427438	1984*	2445701	6	6	340	
	1500	— 146087	1935*	2427803	1985	2446066	16	16	350	
	1600	— 109562	1936	2428169	1986	2446431	26	26	360	
	1700	— 73037	1937	2428534	1987	2446796				
	1800	— 36512	1938	2428899	1988	2447162				
	1900	+	13	1939	2429264	1989	2447527			
Григорианский календарь	1500	— 146097	1940*	2429630	1990	2447892				
	1600	— 109572	1941	2429995	1991	2448257				
	1700	— 73048	1942	2430360	1992*	2448623				
	1800	— 36524	1943	2430725	1993	2448988				
	1900	0	1944*	2431091	1994	2449353				
	2000	+	36525	1945	2431456	1995	2449718			
	2100	+	73049	1946	2431821	1996*	2450084			
	2200	+	109573	1947	2432186	1997	2450449			
	2300	+	146097	1948*	2432552	1998	2450814			
	2400	+	182622	1949	2432917	1999	2451179			

Високосные годы обозначены знаком *. В григорианском календаре
годы 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300 не являются високосными.

Таблица 2

Коэффициенты разложений C_k^n, m по степеням эксцентриситета

n	m	k = 0				k = 1			
		e ⁰	e ²	e ⁴	e ⁶	e	e ³	e ⁵	e ⁷
-3	0	+1	+ $\frac{3}{2}$	+ $\frac{15}{8}$	+ $\frac{35}{16}$	+3	+ $\frac{27}{8}$	+ $\frac{261}{64}$	+ $\frac{14309}{3072}$
-2	0	+1	+ $\frac{1}{2}$	+ $\frac{3}{8}$	+ $\frac{5}{16}$	+2	+ $\frac{3}{4}$	+ $\frac{65}{96}$	+ $\frac{2675}{4608}$
-1	0	+1	0	0	0	+1	- $\frac{1}{8}$	+ $\frac{1}{192}$	- $\frac{1}{9216}$
+1	0	+1	+ $\frac{1}{2}$	0	0	-1	+ $\frac{3}{8}$	- $\frac{5}{192}$	+ $\frac{7}{9216}$
+2	0	+1	+ $\frac{3}{2}$	0	0	-2	+ $\frac{1}{4}$	- $\frac{1}{96}$	+ $\frac{1}{4608}$
+3	0	+1	+3	$\frac{3}{8}$	0	-3	- $\frac{9}{8}$	+ $\frac{15}{64}$	- $\frac{35}{3072}$
-2	2	0	0	0	0	-1	+ $\frac{1}{3}$	+ $\frac{1}{384}$	+ $\frac{77}{11520}$
-1	2	0	+ $\frac{1}{4}$	+ $\frac{1}{8}$	+ $\frac{5}{64}$	- $\frac{3}{2}$	+ $\frac{13}{12}$	+ $\frac{103}{768}$	+ $\frac{31}{240}$
0	2	0	+ $\frac{3}{4}$	+ $\frac{1}{8}$	+ $\frac{3}{64}$	-2	+ $\frac{11}{6}$	- $\frac{5}{192}$	+ $\frac{751}{11520}$
+1	2	0	+ $\frac{3}{2}$	0	0	- $\frac{5}{2}$	- $\frac{25}{12}$	- $\frac{187}{768}$	+ $\frac{29}{2880}$
+2	2	0	+ $\frac{5}{2}$	0	0	-3	+ $\frac{4}{3}$	- $\frac{37}{384}$	+ $\frac{11}{2840}$
		e	e ³	e ⁵	e ⁷	e ⁰	e ²	e ⁴	e ⁶
-2	1	0	0	0	0	+1	- $\frac{3}{8}$	+ $\frac{5}{192}$	- $\frac{7}{9216}$
-1	1	- $\frac{1}{2}$	- $\frac{1}{8}$	- $\frac{1}{16}$	- $\frac{5}{128}$	+1	- $\frac{9}{8}$	- $\frac{5}{64}$	- $\frac{889}{9216}$
0	1	-1	0	0	0	+1	- $\frac{9}{8}$	+ $\frac{25}{192}$	- $\frac{49}{9216}$
+1	1	- $\frac{3}{2}$	0	0	0	+1	- $\frac{3}{8}$	+ $\frac{5}{192}$	- $\frac{7}{9216}$
+2	1	-2	- $\frac{1}{2}$	0	0	+1	+ $\frac{9}{8}$	- $\frac{25}{64}$	- $\frac{245}{9216}$

Продолжение табл. 2

n	m	k = 2				k = 3				
		e ⁰	e ²	e ⁴	e ⁶	e	e ³	e ⁵	e ⁷	
-3	0	0	$+\frac{9}{2}$	$+\frac{7}{2}$	$+\frac{141}{32}$	0	$+\frac{53}{8}$	$+\frac{393}{128}$	$+\frac{24753}{5120}$	
-2	0	0	$+\frac{5}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{21}{32}$	0	$+\frac{13}{4}$	$-\frac{25}{64}$	$+\frac{393}{512}$	
-2	0	0	+1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{24}$	0	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{81}{128}$	$+\frac{729}{5120}$	
+1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{16}$	0	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{45}{128}$	$-\frac{567}{5120}$	
+2	0	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{48}$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{9}{64}$	$-\frac{81}{560}$	
+3	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{16}$	0	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{45}{128}$	$+\frac{189}{1024}$	
-2	2	+1	$-\frac{7}{2}$	$+\frac{85}{48}$	$-\frac{319}{1440}$	+3	$-\frac{69}{8}$	$+\frac{3663}{640}$	$-\frac{3597}{2560}$	
-1	2	+1	-4	$+\frac{47}{16}$	$-\frac{13}{36}$	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{131}{16}$	$+\frac{8861}{1280}$	$-\frac{9921}{5120}$	
0	2	+1	-4	$+\frac{167}{48}$	$-\frac{503}{720}$	+2	$-\frac{27}{4}$	$+\frac{2079}{320}$	$-\frac{1427}{640}$	
+1	2	+1	$-\frac{7}{2}$	$+\frac{71}{24}$	$-\frac{551}{720}$	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{75}{16}$	$+\frac{5751}{1280}$	$-\frac{8829}{5120}$	
+2	2	+1	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{11}{8}$	$-\frac{179}{720}$		$-\frac{19}{8}$	$+\frac{1053}{640}$	$-\frac{243}{512}$	
			e	e ³	e ⁵	e ⁷	e ⁰	e ²	e ⁴	e ⁶
-2	1	+2	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{45}$	0	$+\frac{27}{8}$	$-\frac{405}{128}$	$+\frac{5103}{5120}$	
-1	1	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{6}$	$+\frac{9}{32}$	$-\frac{9}{80}$	0	$+\frac{17}{8}$	$-\frac{385}{128}$	$+\frac{5201}{5120}$	
0	1	+1	$-\frac{4}{3}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{2}{45}$	0	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{225}{128}$	$+\frac{3969}{5120}$	
+1	1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{180}$	0	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{45}{128}$	$+\frac{567}{5120}$	
+2	1	1	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{1}{15}$	0	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{75}{128}$	$-\frac{441}{1024}$	

Продолжение табл. 2

	"	=			=		
		e^2	e^4	e^6	e^2	e^4	e^6
-3	0	0	$+\frac{77}{8}$	$+\frac{129}{80}$	0	$+\frac{1773}{128}$	$-\frac{4987}{3072}$
-2	0	0	$+\frac{103}{24}$	$-\frac{129}{80}$	0	$+\frac{1097}{192}$	$-\frac{16621}{4608}$
-1	0	0	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{16}{15}$	0	$+\frac{625}{384}$	$-\frac{15625}{9216}$
+1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{5}$	0	$-\frac{125}{384}$	$+\frac{4375}{9216}$
+2	0	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{2}{15}$	0	$-\frac{25}{192}$	$+\frac{625}{4608}$
+3	0	0	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{10}$	0	$+\frac{15}{128}$	$-\frac{875}{3072}$
-2	2	$+\frac{13}{2}$	$-\frac{55}{3}$	$+\frac{10723}{720}$	$+\frac{295}{24}$	$-\frac{13745}{384}$	$+\frac{1102775}{32256}$
-1	2	$+\frac{19}{4}$	$-\frac{121}{8}$	$+\frac{10597}{720}$	$+\frac{389}{48}$	$-\frac{20267}{768}$	$+\frac{626681}{21504}$
0	2	$+\frac{13}{4}$	$-\frac{259}{24}$	$+\frac{8401}{720}$	$+\frac{59}{12}$	$-\frac{3221}{192}$	$+\frac{163363}{8064}$
+1	2	+2	$-\frac{19}{3}$	$+\frac{62}{9}$	$+\frac{125}{48}$	$-\frac{6625}{768}$	$+\frac{679375}{64512}$
+2	2	+1	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{94}{45}$	$+\frac{25}{24}$	$-\frac{1075}{384}$	$+\frac{29375}{10752}$
		e^2	e^4	e^6	e^4	e^6	-
-2	1	$+\frac{16}{3}$	$-\frac{32}{5}$	$+\frac{128}{45}$	$+\frac{3125}{384}$	$-\frac{109375}{9216}$	-
-1	1	$\frac{71}{24}$	$\frac{387}{80}$	$\frac{387}{100}$	$+\frac{523}{128}$	$-\frac{70273}{9216}$	-
0	1	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{5}$	$+\frac{64}{45}$	$+\frac{625}{384}$	$-\frac{30625}{9216}$	-
+1	1	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$+\frac{8}{45}$	$+\frac{125}{384}$	$-\frac{4375}{9216}$	-
+2	1	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{3}{5}$	$-\frac{8}{15}$	$-\frac{25}{128}$	$+\frac{6125}{9216}$	-

Продолжение табл. 2

n	m	k = 6		k = 7		k = 8	k = 9
		e ⁴	e ⁶	e ⁵	e ⁷	e ⁶	e ⁷
-3	0	0	$+\frac{3167}{160}$	0	$+\frac{432091}{15360}$	0	0
-2	0	0	$+\frac{1223}{160}$	0	$+\frac{47273}{4608}$	0	0
-1	0	0	$+\frac{81}{40}$	0	$+\frac{117649}{46080}$	0	0
+1	0	0	$-\frac{27}{80}$	0	$-\frac{16807}{46080}$	0	0
+2	0	0	$-\frac{9}{80}$	0	$-\frac{2401}{23040}$	0	0
+3	0	0	$+\frac{9}{80}$	0	$+\frac{343}{3072}$	0	0
-2	2	$+\frac{345}{16}$	$-\frac{10569}{160}$	$+\frac{69251}{1920}$	$-\frac{5394109}{46080}$	$+\frac{42037}{720}$	$+\frac{3306951}{35840}$
-1	2	$+\frac{209}{16}$	$-\frac{887}{20}$	$+\frac{78077}{3840}$	$-\frac{2228929}{30720}$	$+\frac{17807}{576}$	$+\frac{3313213}{71680}$
0	2	$+\frac{115}{16}$	$-\frac{2049}{80}$	$+\frac{9893}{960}$	$-\frac{889303}{23040}$	$+\frac{42037}{2880}$	$+\frac{367439}{17920}$
+1	2	$+\frac{27}{8}$	$-\frac{189}{16}$	$+\frac{16807}{3840}$	$-\frac{1495823}{92160}$	$+\frac{256}{45}$	$+\frac{531441}{71680}$
+2	2	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{261}{80}$	$+\frac{2401}{1920}$	$-\frac{12005}{3072}$	$+\frac{64}{45}$	$+\frac{59049}{35840}$
		e ⁵	e ⁷	e ⁶	-	e ⁷	-
-2	1	$+\frac{243}{20}$	$-\frac{729}{35}$	$+\frac{823543}{46080}$	-	$+\frac{8192}{315}$	-
-1	1	$+\frac{899}{160}$	$-\frac{6617}{560}$	$+\frac{335081}{46080}$	-	$+\frac{47259}{4480}$	-
0	1	$+\frac{81}{40}$	$-\frac{162}{35}$	$+\frac{117649}{46080}$	-	$+\frac{1024}{315}$	-
+1	1	$+\frac{27}{80}$	$-\frac{81}{140}$	$+\frac{16807}{46080}$	-	$+\frac{128}{315}$	-
+2	1	$-\frac{9}{40}$	$+\frac{27}{35}$	$-\frac{2401}{9216}$	-	$-\frac{32}{105}$	-

Таблица 3

Коэффициенты разложений $S_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета

n	m	k = 1				k = 2				
		e ⁰	e ²	e ⁴	e ⁶	e	e ³	e ⁵	e ⁷	
-2	1	+1	- $\frac{5}{8}$	- $\frac{11}{192}$	- $\frac{457}{9216}$	+2	- $\frac{5}{3}$	+ $\frac{1}{6}$	- $\frac{4}{45}$	
-1	1	+1	- $\frac{7}{8}$	+ $\frac{3}{64}$	- $\frac{199}{9216}$	+ $\frac{3}{2}$	- $\frac{5}{3}$	+ $\frac{35}{96}$	- $\frac{13}{240}$	
0	1	+1	- $\frac{7}{8}$	+ $\frac{17}{192}$	- $\frac{271}{9216}$	+1	- $\frac{7}{6}$	+ $\frac{1}{3}$	- $\frac{19}{360}$	
+1	1	+1	- $\frac{5}{8}$	- $\frac{11}{192}$	+ $\frac{457}{9216}$	+ $\frac{1}{2}$	- $\frac{5}{12}$	+ $\frac{1}{24}$	- $\frac{1}{45}$	
+2	1	+1	- $\frac{1}{8}$	- $\frac{25}{64}$	- $\frac{613}{9216}$	0	+ $\frac{1}{3}$	- $\frac{7}{24}$	+ $\frac{3}{80}$	
+3	1	+1	+ $\frac{5}{8}$	- $\frac{151}{192}$	- $\frac{1387}{9216}$	- $\frac{1}{2}$	+ $\frac{5}{6}$	- $\frac{17}{48}$	+ $\frac{47}{2440}$	
-2	3	0	+ $\frac{7}{8}$	- $\frac{85}{384}$	- $\frac{237}{5120}$	-2	+ $\frac{9}{2}$	- $\frac{103}{60}$	+ $\frac{2}{15}$	
-1	3	0	+ $\frac{13}{8}$	- $\frac{329}{384}$	- $\frac{2009}{15360}$	- $\frac{5}{2}$	+ $\frac{13}{2}$	- $\frac{1709}{480}$	+ $\frac{13}{40}$	
0	3	0	+ $\frac{21}{8}$	- $\frac{243}{128}$	- $\frac{339}{5120}$	-3	+ $\frac{33}{4}$	- $\frac{111}{20}$	+ $\frac{13}{15}$	
+1	3	0	+ $\frac{31}{8}$	- $\frac{1213}{384}$	+ $\frac{143}{1024}$	- $\frac{7}{2}$	+ $\frac{75}{8}$	- $\frac{821}{120}$	+ $\frac{22}{15}$	
+2	3	0	+ $\frac{43}{8}$	- $\frac{1637}{384}$	+ $\frac{3397}{15360}$	-4	+ $\frac{19}{2}$	- $\frac{791}{720}$	+ $\frac{37}{24}$	
			e	e ³	e ⁵	e ⁷	e ⁰	e ²	e ⁴	e ⁶
-2	2	-1	+ $\frac{5}{12}$	+ $\frac{9}{128}$	+ $\frac{1321}{23040}$	+1	- $\frac{7}{2}$	+ $\frac{89}{48}$	- $\frac{211}{2440}$	
-1	2	- $\frac{3}{2}$	+ $\frac{25}{24}$	+ $\frac{15}{256}$	+ $\frac{971}{15360}$	+1	-4	+ $\frac{47}{16}$	- $\frac{29}{72}$	
0	2	-2	+ $\frac{5}{3}$	- $\frac{5}{61}$	+ $\frac{151}{2880}$	+1	-4	+ $\frac{163}{48}$	- $\frac{527}{720}$	
+1	2	- $\frac{5}{2}$	+ $\frac{49}{24}$	- $\frac{35}{256}$	+ $\frac{3941}{46080}$	+1	- $\frac{7}{2}$	+ $\frac{35}{12}$	- $\frac{131}{180}$	
+2	2	-3	+ $\frac{23}{12}$	+ $\frac{19}{128}$	+ $\frac{371}{2560}$	+1	- $\frac{5}{2}$	+ $\frac{3}{2}$	- $\frac{73}{360}$	

Продолжение табл. 3

n	m	k = 3				k = 4				
		e ⁰	e ²	e ⁴	e ⁶	e	e ³	e ⁵	e ⁷	
-2	1	0	$+\frac{27}{8}$	$-\frac{459}{128}$	$+\frac{4887}{5120}$	0	$+\frac{16}{3}$	$-\frac{104}{15}$	$+\frac{26}{9}$	
-1	1	0	$+\frac{17}{8}$	$-\frac{367}{128}$	$+\frac{5489}{5120}$	0	$+\frac{71}{24}$	$\frac{1129}{240}$	$+\frac{1177}{480}$	
0	1	0	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{207}{128}$	$+\frac{3681}{5120}$	0	$+\frac{4}{3}$	$-\frac{34}{15}$	$+\frac{121}{90}$	
+1	1	0	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{51}{128}$	$+\frac{543}{5120}$	0	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{13}{30}$	$+\frac{13}{72}$	
+2	1	0	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{53}{128}$	$-\frac{253}{1024}$	0	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{29}{60}$	$-\frac{107}{240}$	
+3	1	0	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{81}{128}$	$-\frac{1683}{5120}$	0	$-\frac{7}{24}$	$+\frac{131}{240}$	$-\frac{203}{576}$	
-2	3	+1	$-\frac{17}{2}$	$+\frac{951}{64}$	$-\frac{38947}{5120}$	+4	-24	$+\frac{241}{6}$	$-\frac{5309}{210}$	
-1	3	+1	-9	$+\frac{1143}{64}$	$-\frac{11689}{1024}$	$+\frac{7}{2}$	$-\frac{179}{8}$	$+\frac{2009}{48}$	$-\frac{103781}{3360}$	
0	3	+1	-9	$+\frac{1215}{64}$	$-\frac{71813}{5120}$	+3	$-\frac{39}{2}$	$+\frac{155}{4}$	$-\frac{26843}{840}$	
+1	3	+1	$-\frac{17}{2}$	$+\frac{1143}{64}$	$-\frac{72131}{5120}$	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{63}{4}$	$+\frac{757}{24}$	$-\frac{15387}{560}$	
+2	3	+1	$-\frac{15}{2}$	$+\frac{927}{64}$	$-\frac{56599}{5120}$	+2	$-\frac{23}{2}$	$+\frac{65}{3}$	$-\frac{31013}{1680}$	
			e	e ³	e ⁵	e ⁷	e ²	e ⁴	e ⁶	-
-2	2	+3	$-\frac{69}{8}$	$+\frac{3717}{640}$	$-\frac{213}{160}$	$+\frac{13}{2}$	$-\frac{55}{3}$	$+\frac{10787}{720}$	-	
-1	2	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{131}{16}$	$+\frac{8879}{1280}$	$-\frac{5037}{2560}$	$+\frac{19}{4}$	$-\frac{121}{8}$	$+\frac{10613}{720}$	-	
0	2	+2	$-\frac{27}{4}$	$+\frac{2061}{320}$	$-\frac{25929}{11520}$	$+\frac{13}{4}$	$-\frac{259}{24}$	$+\frac{8369}{720}$	-	
+1	2	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{75}{16}$	$+\frac{5709}{1280}$	$-\frac{4353}{2560}$	+2	$-\frac{19}{3}$	$+\frac{247}{36}$	-	
+2	2	+1	$-\frac{19}{8}$	$+\frac{1087}{640}$	$-\frac{59}{128}$	+1	$-\frac{5}{2}$	$+\frac{763}{360}$	-	

Продолжение табл. 3

n	m	k = 5			k = 6			
		e ²	e ⁴	e ⁶	e ³	e ⁵	e ⁷	
-2	1	0	$+\frac{3125}{384}$	$-\frac{115625}{9216}$	0	$+\frac{899}{160}$	$-\frac{817}{70}$	
-1	1	0	$+\frac{523}{128}$	$-\frac{69023}{9216}$	0	$+\frac{243}{20}$	$-\frac{1215}{56}$	
0	1	0	$+\frac{625}{384}$	$-\frac{29375}{9216}$	0	$+\frac{81}{40}$	$-\frac{2511}{560}$	
+1	1	0	$+\frac{125}{384}$	$-\frac{4625}{9216}$	0	$+\frac{27}{80}$	$-\frac{135}{224}$	
+2	1	0	$-\frac{25}{128}$	$+\frac{5275}{9216}$	0	$-\frac{9}{40}$	$+\frac{387}{560}$	
+3	1	0	$-\frac{95}{394}$	$+\frac{4765}{9216}$	0	$-\frac{9}{40}$	$+\frac{117}{224}$	
-2	1	$+\frac{85}{8}$	$-\frac{1355}{24}$	$+\frac{98525}{1024}$	$+\frac{47}{2}$	$-\frac{239}{2}$	$-\frac{33951}{160}$	
-1	3	$+\frac{67}{8}$	$-\frac{2279}{48}$	$+\frac{274345}{3072}$	+17	$-\frac{2949}{32}$	$+\frac{57213}{320}$	
0	3	$+\frac{51}{8}$	$-\frac{593}{16}$	$+\frac{75643}{1024}$	$+\frac{47}{4}$	$-\frac{525}{8}$	$+\frac{43041}{320}$	
+1	3	$+\frac{37}{8}$	$-\frac{635}{24}$	$+\frac{54765}{1024}$	$+\frac{61}{8}$	$-\frac{677}{16}$	$+\frac{56487}{640}$	
+2	3	$+\frac{25}{8}$	$-\frac{50}{3}$	$+\frac{98875}{3072}$	$+\frac{9}{2}$	$-\frac{189}{8}$	$+\frac{3807}{80}$	
			e ³	e ⁵	e ⁷	e ⁴	e ⁶	-
-2	2	$+\frac{295}{24}$	$-\frac{13745}{384}$	$+\frac{276475}{8064}$	$+\frac{345}{16}$	$-\frac{10569}{160}$	-	
-1	2	$+\frac{389}{48}$	$-\frac{20267}{768}$	$+\frac{104551}{3584}$	$+\frac{209}{16}$	$-\frac{887}{20}$	-	
0	2	$+\frac{59}{12}$	$-\frac{3221}{192}$	$+\frac{326101}{16128}$	$+\frac{115}{16}$	$-\frac{2049}{80}$	-	
+1	2	$+\frac{125}{48}$	$-\frac{6625}{768}$	$+\frac{338875}{32256}$	$+\frac{27}{8}$	$-\frac{189}{16}$	-	
+2	2	$+\frac{25}{24}$	$-\frac{1075}{384}$	$+\frac{925}{336}$	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{261}{80}$	-	

Продолжение табл. 3

n	m	k = 7		k = 8		k = 9	k = 10
		e ⁴	e ⁶	e ⁶	e ⁷	e ⁶	e ⁷
-2	1	0	$+\frac{823543}{46080}$	0	$+\frac{8192}{315}$	0	0
-1	1	0	$+\frac{355081}{46080}$	0	$+\frac{47259}{4480}$	0	0
0	1	0	$+\frac{117649}{46080}$	0	$+\frac{1024}{315}$	0	0
+1	1	0	$+\frac{16807}{46080}$	0	$+\frac{128}{315}$	0	0
+2	1	0	$-\frac{2401}{9216}$	0	$-\frac{32}{105}$	0	0
+3	1	0	$-\frac{9947}{46080}$	0	$-\frac{68}{315}$	0	0
-2	3	$+\frac{17969}{384}$	$-\frac{301873}{1280}$	$+\frac{2611}{30}$	$-\frac{39893}{90}$	$+\frac{790053}{5120}$	$+\frac{532345}{2016}$
-1	3	$+\frac{12085}{384}$	$-\frac{32419}{192}$	$+\frac{26371}{480}$	$-\frac{1710983}{5760}$	$+\frac{471527}{5120}$	$+\frac{604279}{4032}$
0	3	$+\frac{2567}{128}$	$-\frac{35563}{320}$	$+\frac{2611}{80}$	$-\frac{87599}{480}$	$+\frac{263351}{5120}$	$+\frac{106469}{1344}$
+1	3	$+\frac{4553}{384}$	$-\frac{84109}{1280}$	$+\frac{8551}{480}$	$-\frac{288221}{2880}$	$+\frac{26809}{1024}$	$+\frac{305593}{8064}$
+2	3	$+\frac{2401}{384}$	$-\frac{127253}{3840}$	$+\frac{128}{15}$	$-\frac{416}{9}$	$+\frac{59049}{5120}$	$+\frac{15625}{1008}$
			e ⁷	e ⁶	-	e ⁷	-
-2	2	$+\frac{69251}{1920}$	$-\frac{5394109}{46080}$	$+\frac{42037}{720}$	-	$+\frac{3306951}{35840}$	-
-1	2	$+\frac{78077}{3840}$	$-\frac{2228929}{30720}$	$+\frac{17807}{576}$	-	$+\frac{3313213}{71680}$	-
0	2	$+\frac{9893}{960}$	$-\frac{889303}{23040}$	$+\frac{42037}{2880}$	-	$+\frac{367439}{17920}$	-
+1	2	$+\frac{16807}{3840}$	$-\frac{1495823}{92160}$	$+\frac{256}{45}$	-	$+\frac{531441}{71680}$	-
+2	2	$+\frac{2401}{1920}$	$-\frac{12005}{3072}$	$+\frac{64}{45}$	-	$+\frac{59049}{35840}$	-

Таблица 4

Система астрономических постоянных (МАС, 1964 г.)

№ №	Название постоянной	Принятое значение	Пределы, в которых заключено истинное значение
Определяющие постоянные			
1	Число эфемеридных секунд в одном тропическом годе, 1900,0	$s = 31556925,9747$	—
2	Гауссова гравитационная постоянная, определяющая астрономическую единицу	$k = 0,01720209895$	—
Основные постоянные			
3	Мера 1 а. е., м	$A = 149600 \cdot 10^6$	$\begin{cases} 149597 \cdot 10^6 \\ 149601 \cdot 10^6 \end{cases}$
4	Скорость света, м/сек	$c = 299792,5 \cdot 10^3$	$\begin{cases} 299792 \cdot 10^3 \\ 299793 \cdot 10^3 \end{cases}$
5	Экваториальный радиус Земли, м	$a_e = 6378160$	$\begin{cases} 6378080 \\ 6378240 \end{cases}$
6	Геоцентрическая гравитационная постоянная, $m^3/сек^2$	$GE = 398603 \cdot 10^9$	$\begin{cases} 398600 \cdot 10^9 \\ 398606 \cdot 10^9 \end{cases}$
7	Коэффициент второй зональной гармоники гравитационного потенциала Земли	$J = 0,0010827$	$\begin{cases} 0,0010824 \\ 0,0010829 \end{cases}$
8	Отношение масс. Луны и Земли	$\mu = 1/81,30$	$\begin{cases} 1/81,29 \\ 1/81,31 \end{cases}$
9	Среднее сидерическое движение Луны, $сек^{-1}$, 1900,0	$n_{\zeta}^* = 2,661699489 \cdot 10^{-6}$	—
10	Общая прецессия в долготе за тропическое столетие, 1900,0	$p = 5025'',64$	$\begin{cases} 5025,40 \\ 5025,90 \end{cases}$
11	Наклонение эклиптики к экватору, 1900,0	$\varepsilon = 23^{\circ}27'08'',26$	$\begin{cases} 23^{\circ}27'08'',16 \\ 23^{\circ}27'08'',36 \end{cases}$
12	Постоянная нутации, 1900,0	$N = 9'',210$	$\begin{cases} 9'',210 \\ 9'',210 \end{cases}$

Продолжение табл. 4

№№	Название постоянной	Принятое значение	Пределы, в которых заключено истинное значение
Производные постоянные			
13	Параллакс Солнца	$\pi_{\odot} = 8'', 79405$	$\left\{ \begin{array}{l} 8'', 79388 \\ 8'', 79434 \end{array} \right.$
14	Световой промежуток (световое уравнение)	$\tau_A = \frac{A}{c} = 499^s, 012$	$\left\{ \begin{array}{l} 499^s, 601 \\ 499^s, 016 \end{array} \right.$
15	Постоянная абберации	$\kappa = 20'', 4958$	$\left\{ \begin{array}{l} 20'', 4954 \\ 20'', 4960 \end{array} \right.$
16	Сжатие Земли	$f = 1/298, 25$	$\left\{ \begin{array}{l} 1/298, 33 \\ 1/298, 20 \end{array} \right.$
17	Гелиоцентрическая гравитационная постоянная, $m^3/сек^2$	$GS = 132718 \cdot 10^{15}$	$\left\{ \begin{array}{l} 132710 \cdot 10^{15} \\ 132721 \cdot 10^{15} \end{array} \right.$
18	Отношение масс Солнца и Земли	$\frac{S}{E} = 332958$	$\left\{ \begin{array}{l} 332935 \\ 332967 \end{array} \right.$
19	Отношение массы Солнца к массе системы Земля — Луна	$\frac{S}{E(1+\mu)} = 328912$	$\left\{ \begin{array}{l} 328889 \\ 328921 \end{array} \right.$
20	Возмущенное среднее расстояние Луны, m	$a_{\zeta} = 384400 \cdot 10^3$	$\left\{ \begin{array}{l} 384399 \cdot 10^3 \\ 384401 \cdot 10^3 \end{array} \right.$
21	Постоянная синуса параллакса Луны	$F_0 \sin \pi_{\zeta} = 3422'', 451$	$\left\{ \begin{array}{l} 3422'', 397 \\ 3422'', 504 \end{array} \right.$
22	Постоянная лунного неравенства	$L_0 = F_0 \frac{a_{\zeta}}{A} \frac{\mu}{1+\mu} = 6'', 43987$	$\left\{ \begin{array}{l} 6'', 4390 \\ 6'', 4407 \end{array} \right.$
23	Постоянная параллактического неравенства	$p_{\zeta} = F_3 \frac{a_{\zeta}}{A} \frac{1-\mu}{1+\mu} = 124'', 986$	$\left\{ \begin{array}{l} 124'', 984 \\ 124'', 989 \end{array} \right.$
24	Система планетных масс (обратные значения):		
	Меркурий	6000000	Сатурн 3501,6
	Венера	408000	Уран 22869
	Земля — Луна	329390	Нептун 19314
	Марс	3093500	Плутон 360000
	Юпитер	1047,355	

Средние элементы планет Солнечной системы и Луны

Меркурий

$$\begin{aligned} \lambda &= 178^{\circ}10'44'', 68 + 538106654'', 80 T + 1'', 084 T^2 \\ \pi &= 75^{\circ}53'58'', 91 + 5599'', 76 T + 1'', 61 T^2, \\ \Omega &= 47^{\circ}08'45'', 40 + 4266'', 75 T + 0'', 626 T^2, \\ i &= 7^{\circ}00'10'', 37 + 6'', 699 T - 0'', 066 T^2, \\ e &= 0,20561421 + 0,00002046 T - 0,000000030 T^2, \\ n &= 14732'', 4197380 - 0'', 000001355 T, \\ a_1 &= 0,38709867, a = 0,38709860. \end{aligned}$$

Венера

$$\begin{aligned} \lambda &= 342^{\circ}46'01'', 39 + 210669162'', 88 T + 1'', 1148 T^2, \\ \pi &= 130^{\circ}09'49'', 8 + 5068'', 93 T - 3'', 515 T^2, \\ \Omega &= 75^{\circ}46'46'', 73 + 3239'', 46 T^2 + 1'', 476 T^2, \\ i &= 3^{\circ}23'37'', 07 + 3'', 621 T - 0'', 0035 T^2, \\ e &= 0,00682069 - 0,00004774 T + 0,000000091 T^2, \\ n &= 5767'', 6697692 + 0'', 0000002628 T, \\ a_1 &= 0,72333222, a = 0,72333162. \end{aligned}$$

Земля

$$\begin{aligned} \lambda &= 99^{\circ}41'48'', 04 + 129602768'', 13 T + 1'', 089 T^2, \\ \pi &= 101^{\circ}13'15'', 0 + 6189'', 03 T + 1'', 63 T^2 + 0'', 012 T^3, \\ e &= 0,1675104 - 0,00004180 T - 0,000000126 T^2, \\ n &= 3548'', 1928323 - 0'', 000001103 T, \\ a_1 &= 1,00000030, a = 1,00000023. \end{aligned}$$

Марс

$$\begin{aligned} \lambda &= 293^{\circ}44'51'', 46 + 68910103'', 83 T + 1'', 1184 T^2, \\ \pi &= 334^{\circ}13'05'', 53 + 6626'', 73 T + 0'', 4675 T^2 - 0'', 0043 T^3, \\ \Omega &= 48^{\circ}47'11'', 19 + 2775'', 57 T - 0'', 005 T^2 - 0'', 0192 T^3, \\ i &= 1^{\circ}51'01'', 20 - 2'', 430 T + 0'', 0454 T^2, \\ e &= 0,09331290 + 0,000092064 T - 0,000000077 T^2, \\ n &= 1886'', 5186207 + 0'', 000000463 T, \\ a_1 &= 1,52369146, a = 1,52368840. \end{aligned}$$

T — время, считаемое в юлианских столетиях от среднего гринвичского полдня 1900 г. 0-го янв.

Примечание. Через n обозначено среднее суточное сидерическое движение, получаемое из наблюдений, т. е. включающее влияние вековых возмущений средней долготы. Соответствующее значение большой полуоси, определяемое по третьему закону Кеплера, обозначено через a_1 . Через a обозначена большая полуось, вычисленная без учета вековых возмущений.

Продолжение табл. 5

<i>Юпитер</i>	<i>Сатурн</i>
$\lambda = 159^{\circ}56'25'', 05,$	$\lambda = 14^{\circ}49'39'', 95,$
$\pi = 11^{\circ}54'26'', 72,$	$\pi = 90^{\circ}06'39'', 53,$
$\varrho = 98^{\circ}55'58'', 16,$	$\varrho = 112^{\circ}20'51'', 38,$
$i = 1^{\circ}18'41'', 81,$	$i = 2^{\circ}29'39'', 26,$
$e = 0,04825382,$	$e = 0,05606075,$
$n = 299'', 12837656,$	$n = 120'', 45504214,$
$a = 5,202802875.$	$a = 9,538843210.$

Эклиптика и равноденствие 1850,0. Эпоха: средний гринвичский полдень 1850, янв., 0^h.

<i>Уран</i>	<i>Нептун</i>
$\lambda = 243^{\circ}21'44'', 66,$	$\lambda = 85^{\circ}01'30'', 63,$
$\pi = 169^{\circ}02'55'', 6,$	$\pi = 43^{\circ}45'20'', 2,$
$\varrho = 73^{\circ}29'24'', 9,$	$\varrho = 130^{\circ}40'44'', 0,$
$i = 0^{\circ}46'21'', 60,$	$i = 1^{\circ}46'45'', 32,$
$e = 0,04704433,$	$e = 0,00853341,$
$n = 42'', 23434,$	$n = 21'', 53266,$
$a = 19,190978.$	$a = 30,070672.$

Эклиптика и равноденствие 1900,0. Эпоха: средний гринвичский полдень 0-го янв. 1900 г.

Плутон

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 275^{\circ}15'27'', 03, \\
 \omega &= 112^{\circ}39'29'', 74, \\
 \varrho &= 109^{\circ}37'55'', 99, \\
 i &= 17^{\circ}6'35'', 34, \\
 e &= 0,24706226, \\
 n &= 14'', 199460, \\
 a &= 39,672599.
 \end{aligned}$$

Эпоха и оскуляция: 1930 сент., 20,0. Эклиптика и равноденствие 1950,0.

Луна

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 270^{\circ}, 434164 + 13^{\circ}, 1763965269d - 0^{\circ}, 001133 T^2 + 0^{\circ}, 0000019 T^3, \\
 \pi &= 334^{\circ}, 329556 + 0^{\circ}1114040803d - 0^{\circ}, 010325 T^2 - 0^{\circ}, 000012 T^3, \\
 \varrho &= 259^{\circ}, 183275 - 0^{\circ}, 0529532222d + 0^{\circ}, 002078 T^2 + 0^{\circ}, 000002 T^3, \\
 e &= 0,054900489, i = 5^{\circ}8'43'', 427, a = 384402 \text{ км.}
 \end{aligned}$$

Эпоха 1900, янв., 0^h12^mET. Время T считается от основной эпохи в юлианских столетиях по 36 525 эфемеридных суток, d — в сутках.